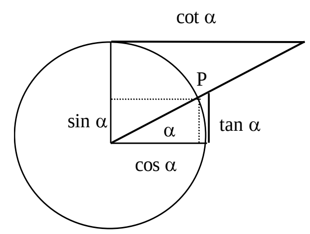
IX. Trigonométrie

1. Rappels

1.1 Définitions :



Dans le cercle trigonométrique C (O , 1), si nous fixons un point P correspondant à un angle d'amplitude α, nous avons défini :

$\cos\alpha$ = abscisse du point P

$\sin\alpha$ = ordonnée du point P.

si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ $\qquad \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

si $\alpha \neq k\pi,\ k \in Z$ $\qquad \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

1.2 Propriété fondamentale

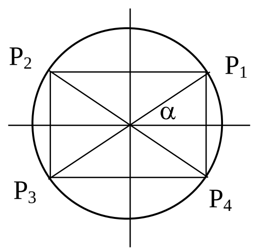
Cette propriété s'établit facilement par le théorème de Pythagore : $\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$

1.3 Valeurs particulières:

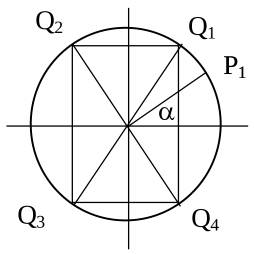
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0	0	1	0	/
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	/	0

1.4 Réduction au premier quadrant:

Par les figures ci-dessous, on détermine aisément les relations du tableau suivant.



P_2, P_3 , et P_4 permettent de situer les angles
$\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$ et $2\pi - \alpha \cong -\alpha$
Q_1 , Q_2 , Q_3 , et Q_4 permettent de situer les angles
$\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ et $\frac{3\pi}{2} + \alpha$



P_2 $\beta = \pi - \alpha$ $\alpha + \beta = \pi$	P_3 $\beta = \pm\pi + \alpha$ $\beta - \alpha = \pm\pi$	P_4 $\beta = k2\pi - \alpha$ $\alpha + \beta = k2\pi$	Q_1 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$	Q_2 $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$	Q_3 $\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$ $\alpha + \beta = 270°$	Q_4 $\beta = \frac{3\pi}{2} + \alpha$ $\beta - \alpha = \frac{3\pi}{2}$
$\sin\beta = \sin\alpha$ $\cos\beta = -\cos\alpha$ $\tan\beta = -\text{tg}\,\alpha$	$\sin\beta = -\sin\alpha$ $\cos\beta = -\cos\alpha$ $\tan\beta = \tan\alpha$	$\sin\beta = -\sin\alpha$ $\cos\beta = \cos\alpha$ $\tan\beta = -\tan\alpha$	$\sin\beta = \cos\alpha$ $\cos\beta = \sin\alpha$ $\tan\beta = \cot\alpha$	$\sin\beta = \cos\alpha$ $\cos\beta = -\sin\alpha$ $\tan\beta = -\cot\alpha$	$\sin\beta = -\cos\alpha$ $\cos\beta = -\sin\alpha$ $\tan\beta = \cot\alpha$	$\sin\beta = -\cos\alpha$ $\cos\beta = \sin\alpha$ $\tan\beta = -\cot\alpha$
angles supplémentaires	angles anti - supplémentaires.	angles opposés.	angles complémentaires.	angles anti - complémentaires.		

1.5 Exercices de révision.

1. Si $\cos\alpha = 1/3$ et $\frac{3\pi}{2} .< \alpha < 2\pi$ déterminer $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$ sans faire usage de la calculatrice.

2. Sans utiliser la calculatrice, déterminer : $\sin\frac{5\pi}{4}$, $\sin\frac{17\pi}{6}$, $\cos\frac{7\pi}{4}$, $\sin\frac{19\pi}{6}$

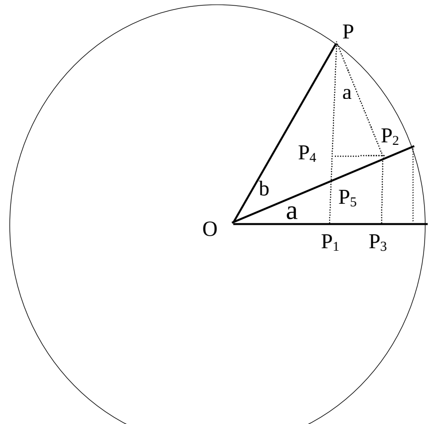
3. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}-a)\cos(\pi-a)\tan(a+3\pi)}{\sin(\pi+a)\sin(-a)\cot(\frac{\pi}{2}+a)} =$ b) $\dfrac{\cot 430°}{\cos(-250°)}+\dfrac{\sin 215°}{\tan 575°\sin(-290°)\cos 145°} =$

c) $\dfrac{\cos(a-\frac{\pi}{2})\sin(\frac{3\pi}{2}+a)}{\tan(3\pi-a)\cot(a-2\pi)} =$

2. Formules d'addition.

Dans ce paragraphe nous allons établir les valeurs des nombres trigonométriques de la somme et de la différence de deux angles.
Nous envisageons le cas de la somme de deux angles aigus dont le résultat est un angle aigu. (cfr. figure ci-contre)



Considérons le cercle trigonométrique C (O , 1).
Nous avons :

$\cos(a+b) = \overline{OP_1} = \overline{OP_3} - \overline{P_1P_3}$

Dans le $\Delta\ OP_2P_3$ $\overline{OP_3} = \overline{OP_2}\ .\cos a$

Dans le $\Delta\ OPP_2$: $\overline{OP_2} = \overline{OP}\ .\cos b = 1\ .\cos b = \cos b$

Et nous obtenons : $\overline{OP_3} = \cos b\ .\cos a$

D'autre part, dans le triangle OPP_2, nous avons :

$\overline{PP_2} = \overline{OP}\ .\sin b = 1\ .\sin b = \sin b$

Les triangles rectangles OP_1P_5 et P_5PP_2 sont rectangles et ont deux angles aigus opposés par le sommet donc les autres angles aigus sont égaux : $P_4\hat{P}P_2 = P_5\hat{O}P_1 = a$

En exprimant la valeur de $\overline{P_2P_4}$ dans le triangle P_2P_4P et en utilisant la valeur de $\overline{PP_2}$ trouvée ci-dessus, nous avons : $\overline{P_1P_3} = \overline{P_2P_4} = \overline{PP_2}\sin a = \sin b\ .\sin a = \sin a\ .\sin b$

Or : $\cos(a+b) = \overline{OP_1} = \overline{OP_3} - \overline{P_1P_3}$ c-à-d $\cos(a+b) = \cos a\ .\cos b - \sin a\ .\sin b$.

On peut refaire une démonstration analogue dans les autres cas de figure.
Les autres formules s'établiront facilement à partir de celle-ci.

$\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos a\cos(-b) - \sin a\sin(-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) = \cos((\frac{\pi}{2} - a) - b) = \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos b + \sin(\frac{\pi}{2} - a)\sin b$

et donc $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a\cos(-b) + \sin(-b)\cos a = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

En rassemblant ces égalités nous obtenons:

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b-\sin a\sin b} = \frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\frac{\sin b\cos a}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}} = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$

De même $\tan(a-b) = \tan(a+(-b)) = \dfrac{\tan a+\tan(-b)}{1-\tan a\tan(-b)} = \dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

Nous retiendrons:

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(a\pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b\\ \sin(a\pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b\\ \tan(a\pm b) = \dfrac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\tan b}\end{array}}$$

Exercices.

1. Sans utiliser la machine, déterminer les nombres trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$
2. A partir des formules d'addition calculer les nombres trigonométriques de π - a, π + a, $\frac{\pi}{2}$ - a,...

3. Sans calculatrice, déterminer les nombres trigonométriques de a + b et de a - b sachant que

   a) $\sin a = -\frac{1}{2}$ et $\cos b = \frac{1}{3}$ si $a \in$ quadrant 3 et $b \in$ quadrant 4

   b) $\sin a = \frac{3}{4}$ et $\cos b = -\frac{2}{3}$ si $\frac{\pi}{2} \le a \le \pi$ et $\frac{\pi}{2} \le b \le \pi$
4. Vérifier $\sin a \sin (b - c) + \sin b \sin (c - a) + \sin c \sin (a - b) = 0$
5. Vérifier $\sin (a + b) \sin (a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$
6. Vérifier $\sin a \cos a + \sin b \cos b = \sin (a + b) \cos (a - b)$
7. Vérifier $\cos^2 (\frac{2\pi}{3} - a) + \cos^2 a + \cos^2 (\frac{2\pi}{3} + a) = \frac{3}{2}$

3. Formules de duplication

En considérant le cas où a = b dans les formules d'addition, nous obtenons:

$\sin 2a = \sin a \cos a + \sin a \cos a = 2 \sin a \cos a$

$\cos 2a = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\tan 2a = \dfrac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \tan a} = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

Nous retiendrons:

$$\boxed{\begin{gathered} \sin 2a = 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \end{gathered}}$$

Exercices.

1. Vérifier $1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$
2. Vérifier $1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$
3. Vérifier $\cos^4 a - \sin^4 a = \cos 2a$
4. Vérifier $\dfrac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} = \tan a$
5. Vérifier $\dfrac{1 - \cos 2a}{\sin 2a} = \tan a$
6. Vérifier $\cot a - \tan a = 2 \cot 2a$
7. Déterminer sin 3a en fonction de sin a uniquement, cos 3a en fonction de cos a uniquement et tan 3a en fonction de tan a uniquement.

Remarque: les égalités des deux premiers exercices sont souvent employées et utiles à mémoriser.
Elles sont connues sous le nom de "formules de **Carnot**"

$$\boxed{\begin{gathered} 1 + \cos 2a = 2\cos^2 a \\ 1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a \end{gathered}}$$

4. Nombres trigonométriques de a à partir de tan a/2

Nous savons $\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = 1$

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \dfrac{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}}{\dfrac{\cos^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}} + \dfrac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}} = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

$$\text{De même } \cos a = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}} = \frac{\dfrac{\cos^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}} - \dfrac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}}{\dfrac{\cos^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}} + \dfrac{\sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2}}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

N.B. ces transformations ne sont possibles que si $\cos \frac{a}{2} \neq 0$ c-à-d si $\frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (ou $a \neq \pi + k 2\pi$)

La tangente s'obtient directement à partir des formules de duplication.

Nous retiendrons:

$$\boxed{\text{si } a \neq \pi + k2\pi: \quad \sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} \qquad \cos a = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} \qquad \tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}}$$

Exercices.

1. Connaissant la valeur de tan $\frac{\pi}{6}$, retrouver celle de sin $\frac{\pi}{3}$, cos $\frac{\pi}{3}$, tan $\frac{\pi}{3}$
2. Sachant que tan $\alpha = -\frac{2}{3}$ calculer sin 2α, cos 2α, tan 2α
3. Transformer l'expression suivante pour l'exprimer en fonction de tan $\frac{a}{2}$: tan a + 3cos a - 2 sin a

5. Formules logarithmiques (ou formules de Simpson)

Dans les formules d'addition, posons a+b = p et a - b = q $\Rightarrow$ a = $\frac{p+q}{2}$ et b = $\frac{p-q}{2}$

cos (a + b) + cos (a - b) = cos a cos b - sin a sin b + cos a cos b + sin a sin b

donc cos (a + b) + cos (a - b) = 2 cos a cos b

c-à-d cos p + cos q = 2 cos $\frac{p+q}{2}$ cos $\frac{p-q}{2}$

cos (a + b) - cos (a - b) = cos a cos b - sin a sin b - cos a cos b - sin a sin b

donc cos (a + b) - cos (a - b) = -2 sin a sin b

c-à-d cos p - cos q = -2 sin $\frac{p+q}{2}$ sin $\frac{p-q}{2}$

sin (a + b) + sin (a - b) = sin a cos b + sin b cos a + sin a cos b - sin b cos a

donc sin (a + b) + sin (a - b) = 2 sin a cos b

c-à-d sin p + sin q = 2 sin $\frac{p+q}{2}$ cos $\frac{p-q}{2}$

sin (a + b) - sin (a - b) = sin a cos b + sin b cos a - sin a cos b + sin b cos a

donc sin (a + b) - sin (a - b) = 2 sin b cos a

c-à-d sin p - sin q = 2 cos $\frac{p+q}{2}$ sin $\frac{p-q}{2}$

tan (a + b) + tan (a - b) = tan p + tan q = $\frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q + \sin q \cos p}{\cos p \cos q} = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$

tan (a + b) - tan (a - b) = tan p - tan q = $\frac{\sin p}{\cos p} - \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q - \sin q \cos p}{\cos p \cos q} = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$

Nous retiendrons:

cos p + cos q = 2 cos $\frac{p+q}{2}$ cos $\frac{p-q}{2}$

cos p - cos q = -2 sin $\frac{p+q}{2}$ sin $\frac{p-q}{2}$

sin p + sin q = 2 sin $\frac{p+q}{2}$ cos $\frac{p-q}{2}$

sin p - sin q = 2 cos $\frac{p+q}{2}$ sin $\frac{p-q}{2}$

tan p $\pm$ tan q = $\frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q}$

et les formules inverses:

2 cos a cos b = cos (a + b) + cos (a - b)

- 2 sin a sin b = cos (a + b) - cos (a - b)

2 sin a cos b = sin (a + b) + sin (a - b)

Exercices.

1. Simplifier
   a) $\frac{\cos a - \cos 3a}{\sin 3a - \sin a}$
   b) $\frac{\cos 2a - \cos 4a}{\sin 4a - \sin 2a}$
   c) $\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q}$
   d) $\frac{\cos 2p - \cos 2q}{\sin 2p + \sin 2q}$
   e) $\frac{\cos 3b - \cos(4a+3b)}{\sin(4a+3b) + \sin 3b}$
   f) $\frac{\cos na - \cos(n+2)a}{\sin(n+2)a - \sin na}$
2. Calculer sin a + sin (a + $\frac{2\pi}{3}$) + sin (a + $\frac{4\pi}{3}$)

3. Vérifier les identités suivantes:
   a) $\dfrac{\sin 2a + \sin 5a - \sin a}{\cos 2a + \cos 5a + \cos a}$ = tan 2a
   b) cos 2a cos a - sin 4a sin a = cos 3a cos 2a
   c) cos $\dfrac{11\pi}{12}$ cos $\dfrac{5\pi}{12} = -\dfrac{1}{4}$ (sans calculatrice)
   d) cos $\dfrac{4\pi}{9}$ + cos $\dfrac{2\pi}{9}$ - cos $\dfrac{\pi}{9}$ = 0 (sans calculatrice)

6. Exercices récapitulatifs.

1. Vérifier les identités suivantes:
   a) sin 7a - sin 5a - 2cos 5a sin 2a = - 2 sin a cos 4a
   b)cos ^{2} (a + b) + cos ^{2} (a - b) - cos 2a cos 2b = 1
   c) $\dfrac{\tan(\frac{\pi}{4}+a)+\tan(\frac{\pi}{4}-a)}{\tan(\frac{\pi}{4}+a)-\tan(\frac{\pi}{4}-a)} = \dfrac{1}{\sin 2a}$
   d) cos 2a (1 + tan a tan 2a) = 1
   e) $\frac{1}{2}$ (tan ($\frac{\pi}{4}$ + a) - tan ($\frac{\pi}{4}$ - a)) = tan 2a
   f) $\dfrac{\sin 2a + \sin a}{1 + \cos a + \cos 2a}$ = tan a
2. Si a et b sont les mesures des angles aigus d'un triangle rectangle, vérifier:
   a) sin 2a + sin 2b = 2 cos (a - b)
   b) cos a - cos b = $\sqrt{2}$ sin $\frac{b-a}{2}$

7. Equations trigonométriques.

7.1 Equations élémentaires

Une équation trigonométrique est dite élémentaire si elle peut être ramenée à une des formes suivantes:
sin b = sin a   cos b = cos a   tan b = tan a

Nous constatons:

sin b = sin a $\Leftrightarrow$ b = a + k 2π	ou	b = π - a + k 2π
cos b = cos a $\Leftrightarrow$ b = $\pm$ a + k 2π		
tan b = tan a $\Leftrightarrow$ b = a + kπ	avec les C.E. : b $\neq \frac{\pi}{2}$ + k $\pi \neq$ a	

<u>Exemple1</u>
cos x = $\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ cos x = cos $\frac{\pi}{3}$ $\Leftrightarrow$ x = $\pm$ $\frac{\pi}{3}$ + k 2π
Sol. Principales : { $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ } qui sont les solutions comprises entre 0 et 2π

<u>Exemple 2</u>
sin($\frac{3\pi}{2}$ - x) = sin (π + x) $\Leftrightarrow$ $\frac{3\pi}{2}$ - x = π + x + k 2π ou $\frac{3\pi}{2}$ - x = π - (π+x) + k 2π
$\Leftrightarrow$ - 2x = - $\frac{\pi}{2}$ +k2π ou 0x = - $\frac{3\pi}{2}$ + k 2π (éq. imp.)
$\Leftrightarrow$ x = $\frac{\pi}{4}$ + kπ Sol. Principales : { $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ }

<u>Exemple 3</u>
Dans certains cas nous serons amenés à utiliser la calculatrice:
tan ($\frac{3\pi}{2}$ - x) = $\frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{3\pi}{2}$ - x = 0,32175 + kπ $\Leftrightarrow$ -x = -4,39064 + kπ $\Leftrightarrow$ x = 4,39064 + kπ
Sol. principales : {1,24905 ; 4,39064}

<u>Exercices.</u>
A. Résoudre les équations suivantes.
1. 2sin x - 1 = 0
2. cos $\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$
3. cot x - $\sqrt{3}$ =0
4. $\sqrt{2}$ sin x + 1 = 0

5. $\sin 2x = \sin x$
6. $\tan(\pi + 2x) = \tan(x - \frac{\pi}{18})$
7. $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$
8. $\cos(2x - \pi) = \cos(\frac{\pi}{2} - 3x)$
9. $\sin(2\pi - 3x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$
10. $\cos x - 2 = 0$
11. $\cos(3\pi + 2x) = 0,2$

B. a) Tracer le graphe de la fonction $f(x) = 2\cos 2x + 1$ en utilisant les transformations de graphes.
b) Déterminer les racines de cette fonction et vérifier sur le graphe.
c) Déterminer les points d'intersection de cette fonction avec la droite $y = 2$ et vérifier graphiquement
d) Résoudre l'inéquation $2\cos 2x + 1 \geq 0$ et vérifier graphiquement.

7.2 Equations utilisant les propriétés des angles associés.

Exemple: $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \sin x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{2} + x + k2\pi$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ou $0x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ (impossible) $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Exercices.

1. $\cos 2x = -\cos(\pi - x)$
2. $\sin x = -\sin(\pi - 2x)$
3. $\sin 3x = -\sin 2x$
4. $\tan 2x = -\tan(\pi - x)$
5. $\sin(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(\frac{\pi}{2} + x) = 0$
6. $\sin x = \cos x$
7. $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\cos(2x - \frac{\pi}{3})$
8. $\tan x = \cot x$
9. $\cot(x + \frac{\pi}{6}) + \tan(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$
10. $\sin(3x + \pi) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$
11. $\sin 2x + \cos(x + \frac{5\pi}{6}) = 0$
12. $\cos x + \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0$

7.3 Equations à transformer par les formules trigonométriques de base

Exemple: $\cos 2x = \cos x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x - 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x\,(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $2\cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + k\,2\pi$

Sol. principales: $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

Exercices.

Résoudre les équations suivantes:

1. $3\cos^2 x + 2\sin^2 x = 2,75$
2. $\cos 2x + \cos^2 x = 0$
3. $\cos x + \cos 4x = \cos 2x + \cos 3x$
4. $\cos x \cos 4x = \cos 2x \cos 3x$
5. $\sin 3x + \sin 5x + 2\sin 4x = 0$
6. $1 + \cos 2x + 2\cos x = 0$
7. $2\sin^2 x - 5\cos x - 4 = 0$
8. $\sin(x - \frac{\pi}{6})\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

7.4 Equations homogènes en sinus et cosinus.

Exemple

$\sin^3 x + 3\sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\,(\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow x = k\pi$

ou $\tan^2 x + 3\tan x - 1 = 0$ ($\cos x = 0$ n'étant pas solution de l'équation, on divise toute l'équation par $\cos^2 x$)

$\rho = 9 + 4 = 13$ $\tan x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow$ $x = 0,2940 + k\pi$ ou $x = -1,2768 + k\pi$

$S = \{ x \mid x = k\pi$ ou $x = 0,2940 + k\pi$ ou $x = -1,2768 + k\pi\}$

Généralisation et technique:

Une équation trigonométrique est dite homogène en sinus et cosinus lorsque la somme des degrés du sinus et du cosinus de chacun de ses termes est une constante (dans notre exemple, cette constante vaut 3).
Pour résoudre une telle équation, nous suivrons la procédure suivante :
a) mise en évidence des termes en sin x et cos x affectés de leur plus haute puissance, ce qui nous amène à résoudre des équations du type sin x = 0 ou cos x = 0
b) Si l'équation restante est du $n^{ème}$ degré, on la ramène à une équation polynomiale en tan x en divisant tous les termes par $\cos^n x$. En posant alors tan x = y, on résout l'équation en y (du second degré, ou en utilisant Horner).
Il reste alors à déterminer les valeurs de x correspondantes

Exercices. Résoudre:
1. $\cos^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x = 3 \sin x \cos^3 x$
2. $2\sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$
3. $\sin^4 x - 6\sin^3 x \cos x + 11 \sin^2 x \cos^2 x - 6 \sin x \cos^3 x = 0$
4. $3\sin^4 x \cos x + 8\sin^3 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \cos^3 x - 2\sin x \cos^4 x = 0$
5. $3\sin^3 x \cos x + 4\cos^4 x = 3\cos^2 x + \sin x \cos^3 x$

7.5 Equations linéaires en sin x et cos x

Une équation linéaire en sinus et cosinus est une équation du type $a \cos x + b \sin x = c$ $\quad a, b, c, \in R_0$

exemple: $3\cos x + \sqrt{3} \sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos x + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x + 1 = 0$

Posons $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $\varphi = \frac{\pi}{6}$ Nous obtenons : $\cos x + \tan \varphi \sin x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x \cos \varphi + \sin \varphi \sin x + \cos \varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x - \varphi) = -\cos \varphi$

$\Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6} \quad \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + k\,2\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + k\,2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{3} + k\,2\pi$ Sol. Principales : $\{\frac{4\pi}{3}, \pi\}$

En général :

$a, b, c, \in R_0 \qquad a \cos x + b \sin x = c \Leftrightarrow \cos x + \frac{b}{a} \sin x = \frac{c}{a}$

Posons : $\frac{b}{a} = \tan \varphi \Rightarrow \cos x + \tan \varphi \sin x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \cos x + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin x = \frac{c}{a}$

$\Leftrightarrow \cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi = \frac{c}{a} \cos \varphi \Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi$

Nous constatons que le second membre de cette dernière équation est une expression dont on peut calculer la valeur numérique. Il s'agit donc toujours d'une équation élémentaire que l'on peut résoudre.

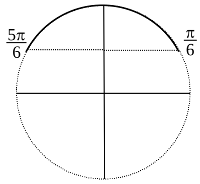
Exercices.
1. $\sin x - 2\cos x + 2 = 0$
2. $\sqrt{3} \cos x - 3 \sin x + 3 = 0$
3. $\sqrt{3} \cos x - \sin x - 1 = 0$
4. $\cos x + \sqrt{3} \sin x + \sqrt{3} = 0$
5. $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 3$
6. $\cos x - \sin x = 0.5$
7. $2\cos x - 3\sin x = 0.5$

7.6 Exercices généraux.

1. $\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0$
2. $2\cos^4 x - 5\sin^2 x + 2\sin^4 x = 0$
3. $2\cos x = \tan x$
4. $\sin x + 4\cos x = 4$
5. $\tan x + \cot x = 1$
6. $\cos 2x - \sin 5x = \sin x$
7. $\tan x + \cos x = 0$
8. $2(-\sin x + \cos x) \sin 2x - (\sin x + \cos x) . \cos 2x = 0$
9. $4\tan x - 1 + 2\tan^3 x - 5\tan^2 x = 0$
10. $2\cos 2x (1 - \sin x) + \cos x \sin 2x = 0$
11. $\sin x + \sin 3x + \sin 2x = 0$

8. Inéquations trigonométriques.

Exemple 1 : Résoudre $\sin 3x > \frac{1}{2}$



1[ère] méthode Considérons tout d'abord l'inéquation $\sin y > \frac{1}{2}$

Graphiquement nous voyons $\frac{\pi}{6} < y < \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < y < \frac{5\pi}{6}$ dans $[0,\pi]$

Donc $\frac{\pi}{6} + k\,2\pi < y < \frac{5\pi}{6} + k\,2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + k\,2\pi < 3x < \frac{5\pi}{6} + k\,2\pi$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{18} + k\,\frac{2\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{18} + k\,\frac{2\pi}{3}$

2[ème] méthode : $\sin 3x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 3x - \frac{1}{2} > 0$

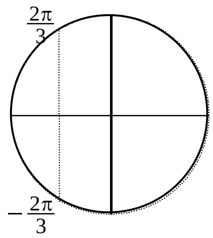
En résolvant l'équation $\sin 3x - \frac{1}{2} = 0$ nous obtenons : $x = \frac{\pi}{18} + k\,\frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{18} + k\,\frac{2\pi}{3}$

Ce qui nous permet d'obtenir le tableau de variation de signe de la fonction $f(x) = \sin 3x - \frac{1}{2}$ (entre 0 et 2π)

x		$\frac{\pi}{18}$		$\frac{5\pi}{18}$		$\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}$		$\frac{\pi}{18}+\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{18}+\frac{4\pi}{3}$	
$\sin 3x - \frac{1}{2}$	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-

Et nous retrouvons bien la solution trouvée précédemment : $\frac{\pi}{18} + k\,\frac{2\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{18} + k\,\frac{2\pi}{3}$

Exemple 2 : Résoudre $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{1}{2}$



1[ère] méthode : Nous savons $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos -\frac{2\pi}{3}$

et nous obtenons :

$-\frac{2\pi}{3} + k\,2\pi < 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{2\pi}{3} + k\,2\pi \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + k\,2\pi < 2x < \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + k\,2\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{5\pi}{12} + k\,\pi < 2x < \frac{11\pi}{12} + k\,2\pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{24} + k\,\pi < x < \frac{11\pi}{24} + k\,\pi$

2[ème] méthode : $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} > 0$

En résolvant l'équation : $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} = 0$, nous obtenons : $x = \frac{11\pi}{24} + k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{24} + k\pi$

Ce qui nous permet d'obtenir le tableau de variation de signe de la fonction $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$ (entre 0 et 2π)

x		$\frac{11\pi}{24}$		$\frac{19\pi}{24}$		$\frac{11\pi}{24}+\pi$		$\frac{19\pi}{24}+\pi$	
$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Ce tableau confirme la solution trouvée précédemment : $-\frac{5\pi}{24} + k\,\pi < x < \frac{11\pi}{24} + k\,\pi$

Exemple 3 : Résoudre $\tan\frac{x}{2} \geq 2$

Nous trouvons directement par le graphique : $1{,}107 + k\pi \leq \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 2{,}214 + k\,2\pi \leq x < \pi + k\,2\pi$

Ou en utilisant le tableau de variation : en résolvant l'équation $\tan\frac{x}{2} - 2 = 0$, nous obtenons : $x = 2{,}214 + k\,2\pi$

L'étude de signe de la fonction $\tan\frac{x}{2} - 2$ confirme la solution $2{,}214 + k\,2\pi \leq x < \pi + k\,2\pi$

x	0		2,214		2π
$\tan\frac{x}{2} - 2$	-	-	0	+	+

Exercices.

1. $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 1$
2. $\cos 2x < -0{,}521$
3. $\left|\tan 3x\right| \leq 0{,}5$
4. $\left|\sin\frac{x}{2}\right| > \frac{1}{3}$
5. $\left|\cos\frac{3x}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\left|\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq 5$
7. $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geq \sin\frac{3\pi}{4}$
8. $\sin\left(3x + \frac{2\pi}{9}\right) < \cos\frac{4\pi}{3}$
9. $\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) > -\tan\frac{\pi}{3}$
10. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < \cos\frac{\pi}{3}$

9. Exercices supplémentaires.

9.1 En utilisant les formules d'addition, calculer les nombres trigonométriques des angles suivants et vérifier votre réponse à l'aide de votre calculatrice.

$\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{12}$, $-\frac{\pi}{12}$

9.2 Calculer, sans machine

1. $\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{18}\sin\frac{\pi}{9}$
2. $\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{7\pi}{18}+\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}$
3. $\dfrac{\tan\frac{4\pi}{9}-\tan\frac{5\pi}{18}}{1+\tan\frac{4\pi}{9}\tan\frac{5\pi}{18}}$

<u>Solutions</u> : 1) 0.5 2) 0.5 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

9.3 Calculer, sans machine,

1. $\cos(a+b)$ sachant que $\sin a = -8/17$; $\sin b = 4/5$; $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < b < \pi$
2. $\tan(a+b)$ sachant que $\sin a = -1/2$; $\cos b = 1/3$; $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2} < b < 2\pi$
3. $\tan(a-b)$ sachant que $\sin a = 3/4$; $\cos b = -2/3$; $\frac{\pi}{2} < a < \pi < b < \frac{3\pi}{2}$

<u>Solutions</u> :

1. $\cos a = \frac{-15}{17}$ $\cos b = \frac{-3}{5}$ $\cos(a+b) = \frac{77}{85}$
2. $\cos a = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\sin b = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ $\tan(a+b) = \frac{1-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}-9\sqrt{3}}{5}$
3. $\cos a = \frac{-\sqrt{7}}{4}$ $\sin b = \frac{-\sqrt{5}}{3}$ $\tan(a-b) = \frac{-6-\sqrt{35}}{2\sqrt{7}-3\sqrt{5}} = \frac{27\sqrt{7}+32\sqrt{5}}{17}$

9.4 Vérifier les identités suivantes :

1. $\sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b) = 0$
2. $\cos a \sin(b-c) + \cos b \sin(c-a) + \cos c \sin(a-b) = 0$
3. $\sin(a-b)\cos(a+b) = \sin a \cos a - \sin b \cos b$
4. $\sin(a+b)\cos(a-b) = \sin a \cos a + \sin b \cos b$
5. $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$
6. $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$
7. $\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{\sin(a+b)+\sin(a-b)} = \cot a$
8. $\dfrac{\tan a+\tan b}{\tan a-\tan b} = \dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$
9. $\dfrac{1+\tan a\tan b}{1-\tan a\tan b} = \dfrac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)}$

9.5 Calculer les expressions suivantes (sans calculatrice):

1. $\cos a + \cos(a+\frac{2\pi}{3}) + \cos(a+\frac{4\pi}{3})$
2. $\sin^2(\frac{2\pi}{3}-x) + \sin^2(\frac{2\pi}{3}+x) + \sin^2 x$
3. $\cos^2(\frac{2\pi}{3}-a) + \cos^2 a + \cos^2(\frac{2\pi}{3}+a)$

Solutions : 1) 0 2) 1.5 3) 1.5

9.6 Vérifier les identités suivantes :

1. $\sin^2(a + b) - \sin^2(a - b) = \sin 2a \sin 2b$
2. $\tan a + \cot a = \dfrac{2}{\sin 2a}$
3. $\dfrac{1}{\cot a - \cot 2a} = \sin 2a$
4. $\dfrac{1}{1+\tan a \tan 2a} = \cos 2a$
5. $\dfrac{\cot a - \tan a}{\cot a + \tan a} = \cos 2a$
6. $\dfrac{\cos^3 a + \sin^3 a}{\cos a + \sin a} = 1 - \dfrac{\sin 2a}{2}$

9.7 Calculer, sans machine

1. $\tan 2a$ sachant que $\cos a = -1/3$ et $\pi < a < \dfrac{3\pi}{2}$
2. $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan 2a$, $\cot 2a$
   a) sachant que $\sin a = 0,6$ et $\cos a > 0$
   b) sachant que $\cos a = 12/13$ et $\sin a < 0$

Solutions :

1) $\sin a = \dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$ $\tan 2a = \dfrac{-4\sqrt{2}}{7}$

2).a) $\sin 2a = 0.96$ $\cos 2a = 0.28$ $\tan 2a = \dfrac{24}{7}$ $(\cos a = 0.8)$

b) $\sin 2a = \dfrac{-120}{169}$ $\cos 2a = \dfrac{119}{169}$ $\tan 2a = \dfrac{-120}{119}$ $(\sin a = \dfrac{-5}{13})$

9.8 Factoriser les expressions suivantes:

1. $\sin 5a + \sin a$
2. $\sin 7a - \sin 5a$
3. $\cos 7a + \cos 4a$
4. $\cos 5a - \cos 2a$
5. $\sin 2a - \sin 4a$
6. $\cos 3a - \cos 5a$
7. $\sin 70° + \sin 50°$
8. $\cos \dfrac{\pi}{18} + \cos 50°$
9. $\tan a - \tan 4a$
10. $\tan \dfrac{\pi}{6} - \tan 50°$

9.9 Simplifier les expressions suivantes:

1. $\dfrac{\cos a - \cos 3a}{\sin 3a - \sin a}$
2. $\dfrac{\cos 2a - \cos 4a}{\sin 4a - \sin 2a}$
3. $\dfrac{\sin 2a + \sin 3a}{\cos 2a - \cos 3a}$
4. $\dfrac{\cos 4a - \cos a}{\sin a - \sin 4a}$
5. $\dfrac{\sin 3a - \sin a}{\cos 3a - \cos a}$

Solutions : 1) $\tan 2a$ 2) $\tan 3a$ 3) $\cot \dfrac{a}{2}$ 4) $\tan \dfrac{5a}{2}$ 5) $-\cot 2a$

9.10 Vérifier les identités suivantes:

1. $\dfrac{\sin p \pm \sin q}{\cos p + \cos q} = \tan \dfrac{p \pm q}{2}$
2. $\dfrac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \dfrac{\tan \dfrac{p+q}{2}}{\tan \dfrac{p-q}{2}}$
3. $\dfrac{\sin p \pm \sin q}{\cos p - \cos q} = -\cot \dfrac{p \mp q}{2}$
4. $\dfrac{\cos p - \cos q}{\cos p + \cos q} = \tan \dfrac{p+q}{2} \tan \dfrac{q-p}{2}$
5. $\dfrac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = \tan \dfrac{q-p}{2}$
6. $\cot p \pm \cot q = \dfrac{\sin(p \pm q)}{\sin p \sin q}$
7. $\dfrac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b} = \dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$

8. $\tan 2a - \tan a = \dfrac{2\sin a}{\cos a + \cos 3a}$

9. $\dfrac{\sin(p-q)}{\cos p - \cos q} = -\dfrac{\cos\frac{p-q}{2}}{\sin\frac{p+q}{2}}$

10. $\dfrac{1-\mathrm{tg}\,a}{1+\mathrm{tg}\,a} = \cot\left(\dfrac{\pi}{4} + a\right)$

11. $\dfrac{\tan(a+b)+\tan(a-b)}{\tan(a+b)-\tan(a-b)} = \dfrac{\tan a(1+\tan^2 b)}{\tan b(1+\tan^2 a)}$

9.11 Factoriser les expressions suivantes :

1. $1 - 2\cos a + \cos 2a$
2. $1 + 2\cos 2a + \cos 4a$
3. $\cos^2 a - \cos^2 2a$
4. $\cos a + \cos b + \cos(a+b) + 1$
5. $\cos a + \cos b - \cos(a+b) - 1$
6. $1 \pm \tan a$
7. $\tan p \pm \cot q$
8. $\mathrm{cosec}\, 2a - \cot 2a$
9. $\sec 2a + \tan 2a$
10. $1 + \sec 2a$
11. $\sin a + \sin 2a + \sin 3a$
12. $\sin a + 2\sin 2a + \sin 3a$
13. $\sin 3a + \sin 7a + \sin 10a$
14. $\sin 5a - \sin a + \sin 6a$
15. $\sin a + 2\sin 3a + \sin 5a$
16. $\cos a + 2\cos 2a + \cos 3a$
17. $\sin a - \sin 2a + \sin 3a - \sin 4a$
18. $\cos 7a - \cos 5a + \cos 3a - \cos a$
19. $\sin 7a - \sin 5a - \sin 3a + \sin a$
20. $\sin a + \sin b - \sin(a+b)$
21. $\sin(a+b-c) + \sin(b+c-a) + \sin(c+a-b) - \sin(a+b+c)$
22. $\cos 6a - \cos 4a - \cos 2a + 1$

Solutions :

1. $2\cos a(\cos a - 1)$
2. $4\cos 2a\cos^2 a$
3. $\sin a \sin 3a$
4. $4\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{b}{2}$
5. $4\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a}{2}\sin\dfrac{b}{2}$
6. $\dfrac{\sqrt{2}\sin(a\pm 45°)}{\cos a}$
7. $\pm\dfrac{\cos(p\mp q)}{\cos p\cos q}$
8. $\tan a$
9. $\cot\left(\dfrac{\pi}{4} - a\right)$
10. $\dfrac{2\cos^2 a}{\cos 2a}$
11. $\sin 2a(2\cos a + 1)$
12. $4\sin 2a\cos^2\dfrac{a}{2}$
13. $4\sin 5a\cos\dfrac{7a}{2}\cos\dfrac{3a}{2}$
14. $4\cos 3a\sin\dfrac{5a}{2}\cos\dfrac{a}{2}$
15. $4\cos^2 a\sin 3a$
16. $4\cos^2\dfrac{a}{2}\cos 2a$
17. $-4\cos a\sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{5a}{2}$
18. $-4\sin a\sin 4a\cos 2a$
19. $-4\sin a\sin 2a\sin 4a$
20. $4\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{b}{2}$
21. $4\sin a\sin b\sin c$
22. $-4\sin a\sin 2a\cos 3a$

9.12 Calculer les expressions suivantes :

1. $\sin a + \sin\left(a + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(a + \dfrac{4\pi}{3}\right)$
2. $\cos a + \cos\left(a + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(a + \dfrac{4\pi}{3}\right)$
3. $\cos\dfrac{4\pi}{9} + \cos\dfrac{2\pi}{9} - \cos\dfrac{\pi}{9}$
4. $\sin\dfrac{39\pi}{90} - \sin\dfrac{\pi}{10} + \cos\dfrac{11\pi}{30}$
5. $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}}$
6. $\dfrac{\sin a + 2\sin 3a + \sin 5a}{\sin 3a + 2\sin 5a + \sin 7a}$
7. $\dfrac{\sin a + m\sin 3a + \sin 5a}{\sin 3a + m\sin 5a + \sin 7a}$

Solutions : 1) 0 2) 0 3) 0 4) 0 5) 2 6) $\dfrac{\sin 3a}{\sin 5a}$ 7) $\dfrac{\sin 3a}{\sin 5a}$

9.13 Transformer en une somme les expressions suivantes :

1. $2\sin 3a\cos a$
2. $2\cos 3a\sin 2a$
3. $2\cos 4a\cos a$
4. $-2\sin 3a\sin 2a$
5. $2\sin 2a\sin 6a$
6. $2\cos a\sin 5a$
7. $\cos a\cos 7a$
8. $\sin 2a\cos 7a$

9. $2 \cos 2b \cos (a - b)$
10. $2 \sin (2a + b) \cos (a - 2b)$
11. $2 \sin (a + b) \cos (a - b)$
12. $\sin (a + 3b) \sin(a - 3b)$
13. $2 \sin \frac{\pi}{18} \cos \frac{2\pi}{9}$
14. $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$
15. $\cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{11\pi}{12}$
16. $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$

9.14 Vérifier les identités suivantes :

1. $\cos 5a \cos 2a - \cos 4a \cos 3a = - \sin 2a \sin a$
2. $\sin a \sin (b - c) + \sin b \sin (c - a) + \sin c \sin (a - b) = 0$
3. $\cos a \sin (b - c) + \cos b \sin (c - a) + \cos c \sin (a - b) = 0$
4. $\sin (a + b) \sin (a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$
5. $\cos (a + b) \cos (a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b$
6. $\cos^2 (a + b) + \cos^2 (a - b) - \cos 2a \cos 2b = 1$
7. $\cos^2 2a - \sin^2 a = \cos a \cos 3a$
8. $\sin^2 5a - \sin^2 3a = \sin 8a \sin 2a$
9. $1 - \sin^2 5a - \sin^2 2a = \cos 7a \cos 3a$
10. $\sin 7a - \sin 5a - 2 \cos 5a \sin 2a = - 2 \sin a \cos 4a$
11. $\cot (a + \frac{\pi}{12}) - \tan (a - \frac{\pi}{12}) = \frac{4 \cos 2a}{2 \sin 2a + 1}$
12. $\frac{4 \cos 2a}{1 - 2 \sin 2a} = \cot (\frac{\pi}{12} - a) + \tan (\frac{\pi}{12} + a)$

9.15 Résoudre les équations trigonométriques suivantes et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique.

1. $\sin 2x = 2 \sin x$
2. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$
3. $\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x$
4. $\sin 4x + \sin 2x = \sin 3x$
5. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$
6. $\cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$
7. $\cos 2x = \cos x - 1$

Solutions :

1. $x = k \pi$
2. $x = k \frac{\pi}{2}$ ou $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$
3. $x = k\frac{\pi}{2}$ ou $x = k2\pi \Rightarrow x = k\frac{\pi}{2}$
4. $x = k\frac{\pi}{3}$ ou $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Rightarrow x = k\frac{\pi}{3}$
5. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $x = k\frac{2\pi}{5}$ ou $x = \pi + k2\pi$
6. CE. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

   $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$
7. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

9.16 Résoudre :

1. $\cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$
2. $3(1 - \cos x) = 1 - \cos^2 x$
3. $3 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 2{,}75$
4. $\tan (\frac{\pi}{4} + x) - 3 \tan x = 2$
5. $2 \cos x + 3 = 4 \cos \frac{x}{2}$
6. $5 \sin x = 6 \cos^2 x$
7. $\cos 2x = \cos x + 1$
8. $2 \cos 2x + 3 \cos x + 1 = 0$
9. $\tan 2x = 3 \tan x$
10. $3 \tan^2 x + 5 = \frac{7}{\cos x}$
11. $\tan x - \cot x = -1$
12. $\cos x - (2 \cos^2 x - 1) = 1/2$

Solutions :

1. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $x = \pi + k2\pi$
2. $x = k2\pi$
3. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

4. CE : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

   $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$
5. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k\,4\pi$
6. $x = 0{,}72973 + k2\pi$ ou $x = 2{,}41186 + k2\pi$
7. $x = \pm\, 2{,}4667 + k2\pi$
8. $x = \pi + k2\pi$ ou $x = \pm\, 1{,}31812 + k2\pi$
9. CE : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

   $x = k\pi$ ou $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$
10. CE : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$
11. CE : $x \neq k\frac{\pi}{2}$

    $x = 0{,}55357 + k\pi$ ou $x = -\,1{,}01722 + k\pi$
12. $x = \pm\, 1{,}88495 + k2\pi$ ou $x = \pm\, 0{,}62832 + k2\pi$

9.17 Résoudre :

1. $\sqrt{3}\cos x - 3\sin x + 3 = 0$
2. $\sqrt{3}\cos x - \sin x - 1 = 0$
3. $\cos x + \sqrt{3}\sin x + \sqrt{3} = 0$
4. $\sin x - 2\cos x + 2 = 0$
5. $\sin x + 4\cos x = 4$
6. $2\sin x + \cos x = 2$
7. $\sin x + \cos x - 1 = 0$
8. $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x - \sqrt{3} = 0$

<u>Solutions</u> :

1. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$
2. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
3. $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
4. $x = k2\pi$ ou $x = 5{,}35589 + k2\pi$
5. $x = k2\pi$ ou $x = 0{,}48995 + k2\pi$
6. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ou $x = 0{,}64350 + k2\pi$
7. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ou $x = k2\pi$
8. $x = k2\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

9.18 Résoudre:

1. $3\sin x - 2\cos x = 0$
2. $3\cos x - 2\sin x = 0$
3. $\sin x + 4\cos x = 0$
4. $2\sin x = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$
5. $2\sin^2 x - 4\cos^2 x = 0$
6. $\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
7. $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$
8. $2\cos^2 x - 3\cos x\sin x = 0$
9. $5\sin^2 x - 2\cos^2 x - 3\sin x\cos x = 0$
10. $5\cos^2 x + 6\sin^2 x = 7$
11. $2\cos^2 x - 11\sin x\cos x + 4 = 0$
12. $\sec x - \cos x = \sin x$
13. $3\sin^3 x - 4\sqrt{3}\sin^2 x\cos x + 3\cos^2 x\sin x = 0$
14. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin x\cos x$
15. $\cos^4 x + 2\cos^2 x\sin^2 x = 3\sin x\cos^3 x$
16. $2\cos^4 x - 5\sin^2 x\cos^2 x + 2\sin^4 x = 0$
17. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1/2$

<u>Solutions</u> :

1. $x = 0{,}78684 + k\pi$
2. $x = 0{,}98279 + k\pi$
3. $x = -\,1{,}32582 + k\pi$
4. $x = 0{,}25549 + k\pi$
5. $x = \pm\, 0{,}95532 + k\pi$
6. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$
7. $x = 1{,}10715 + k\pi$ ou $x = -\,0{,}46365 + k\pi$
8. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $x = 0{,}58800 + k\pi$
9. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = -\,0{,}38051 + k\pi$
10. $S = \varnothing$
11. $x = 1{,}10715 + k\pi$ ou $x = 0{,}64350 + k\pi$
12. CE : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

    $x = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$
13. $x = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$
14. $x = 1{,}01722 + k\pi$ ou $x = -\,0{,}55357 + k\pi$
15. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

    ou $x = 0{,}46365 + k\pi$
16. $x = \pm\, 0{,}95532 + k\pi$

    ou $x = \pm\, 0{,}61548 + k\pi$
17. $x = \pm\, 1{,}09314 + k\pi$ ou $x = \pm\, 0{,}47766 + k\pi$

9.19 Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\sin x > -\frac{1}{2}$
2. $\cos x \leq -\frac{1}{2}$
3. $\tan x > \sqrt{3}$
4. $|\tan x| \geq \sqrt{3}$
5. $\cos(\frac{\pi}{4} - x) \geq \sin \frac{3\pi}{4}$
6. $\sin(3x + \frac{2\pi}{9}) < -\frac{1}{2}$
7. $\cos(x - \pi) > \frac{\sqrt{3}}{2}$
8. $\tan 3x < \frac{\sqrt{3}}{3}$
9. $|\sin 2x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
10. $|\cos(x + \frac{\pi}{3})| > \frac{1}{2}$

<u>Solutions</u> :

1. $-\frac{\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{7\pi}{6} + k2\pi$
2. $\frac{2\pi}{3} + k2\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + k2\pi$
3. $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$
4. $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$
   ou $\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi$
5. $k2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi$
6. $\frac{17\pi}{54} + k\frac{2\pi}{3} < x < \frac{29\pi}{54} + k\frac{2\pi}{3}$
7. $\frac{5\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{7\pi}{6} + k2\pi$
8. $-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}$
9. $-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$
10. $-\frac{2\pi}{3} + k\pi < x < k\pi$

9.20 Exercices de synthèse

1. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

   a) $f(x) = \sqrt{1+2\sin x}$ sol : $\bigcup_{k\in Z}\left[-\frac{\pi}{6}+k2\pi, \frac{7\pi}{6}+k2\pi\right]$

   b) $f(x) = \frac{\sin 2x - \cos x}{2\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x + \sin^2 x\cos x}$ sol : $R / \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\} / \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\right\} / \bigcup_{k\in Z}\{1{,}10714+k\pi\}$

   c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$ sol : $\bigcup_{k\in Z}\left]-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right[$

2. A tout moment, notre cœur bat, notre pression sanguine augmente pour décroître ensuite entre deux battements. Les maximum et les minimum de pression sanguine portent respectivement les noms de pression systolique et diastolique. La lecture de notre pression sanguine, à l'aide d'un tensiomètre, est traduite par deux chiffres correspondant aux pressions systolique/diastolique. Une lecture de 12/8 est considérée comme normale.
   La pression sanguine d'une personne est modélisée par la fonction $p(t) = 11{,}5 + 2{,}5 \sin(160\,\pi\, t)$ dans laquelle $p(t)$ est la pression en cmHg, et t es*t* le temps exprimé en minutes.
   a) Calculer la période de *p*.
   b) Calculer le nombre de battements de cœur par minute.
   c) Représenter graphiquement la fonction p(t).
   d) Que donnerait le tensiomètre lors d'une lecture de la pression sanguine? Comparer cette lecture à la tension normale.
   e) A quels moments, la pression sanguine vaut-elle 12 ? 8 ? 10.25 ?

3. L'évolution de la population d'une horde de cerfs est modélisée par la fonction :
   $$p(t) = 4000 + 500 \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$
   où t est exprimé en années et où t = 0 correspond au 1er janvier.
   a) Tracer le graphe de p(t) durant un an.
   b) durant l'année, quand la population est-elle maximale ? Quelle est la population à ce moment-là ?

c) y a-t-il un minimum ? Si oui, quand ?
d) quelle est la période de la fonction $P(t)$?

4. Rythmes circadiens. La variation de température du corps est un exemple de rythme circadien, processus biologique qui se répète approximativement toutes les 24h.
   La température est maximale vers 17h et minimale vers 5h. Soit y la température du corps (en °C), et soit $t = 0$ à minuit (t exprimé en heures). Pour une personne déterminée, sa température minimale est de 36.83°C et sa température maximale est de 37.17°C
   a) Déterminer une équation de la forme $y = d + a \sin (bt + c)$ qui modélise cette information
   b) A quels moments de la journée, cette personne a-t-elle une température égale à 37° ?
   c) Quand a-t-elle une température inférieure ou égale à 36.9° ?

5. Variation de température journalière
   La température (en ° C) durant une journée peut-être modélisée par une fonction sinusoïdale en fonction du temps (exprimé en heures). Déterminer une telle fonction dans le cas où
   a) la température maximale est de 10° et la température minimale atteinte à 4h du matin est de – 10°.
   b) la température à minuit est de 15° et les températures maximales et minimales sont de 20°C et 10°C.
   c) la température varie entre 10°C et 30°C et la température moyenne de 20° survient la première fois à 9h du matin.