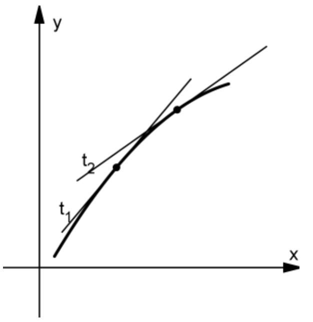
VI. Etudes de fonctions

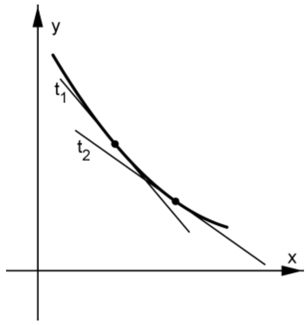
1. Utilisation des dérivées dans l'étude d'une fonction.

1.1 La dérivée première

Après nous être familiarisés avec les techniques de calcul de dérivées, revenons au sens de cette dérivée.
Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la dérivée en un point du graphe de f(x) vaut le coefficient angulaire de la tangente à la courbe en ce point.
Observons les graphiques suivants :



Fonction croissante

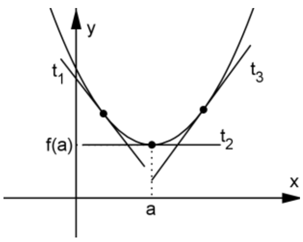


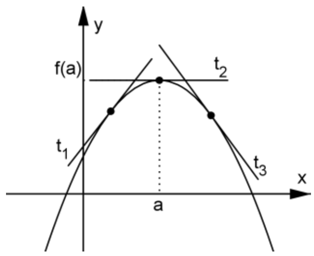
Fonction décroissante

Nous constatons immédiatement que les coefficients angulaires des tangentes à la première courbe sont positifs tandis que ceux des tangentes à la seconde courbe sont négatifs.
Nous concluons :

f est croissante en un point (a, f(a)) $\Leftrightarrow$ $f'(a) > 0$
f est décroissante en un point (a, f(a)) $\Leftrightarrow$ $f'(a) < 0$

De même à partir des graphiques suivants :





nous concluons :

f admet un extremum en un point (a, f(a)) $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en x = a.
Si f' passe du négatif au positif, f admet un minimum en a.
Si f' passe du positif au négatif, f admet un maximum en a.

<u>Schématiquement</u>:

x		a	
$f'(x)$	-	0	+
f(x)	↘	min	↗

x		a	
$f'(x)$	+	0	-
f(x)	↗	max	↘

Ces propriétés de la dérivée vont ainsi nous permettre de déterminer les maxima et minima d'une fonction, ce qui est particulièrement important comme nous le verrons dans les applications.

<u>Exercices</u> :
Déterminer les zones de croissance, les minima et maxima des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^3 + 3x + 5$
2. $f(x) = 2x^3 - 3x + 5$
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

4. $f(x) = \dfrac{(1-3x)^2}{1+x}$

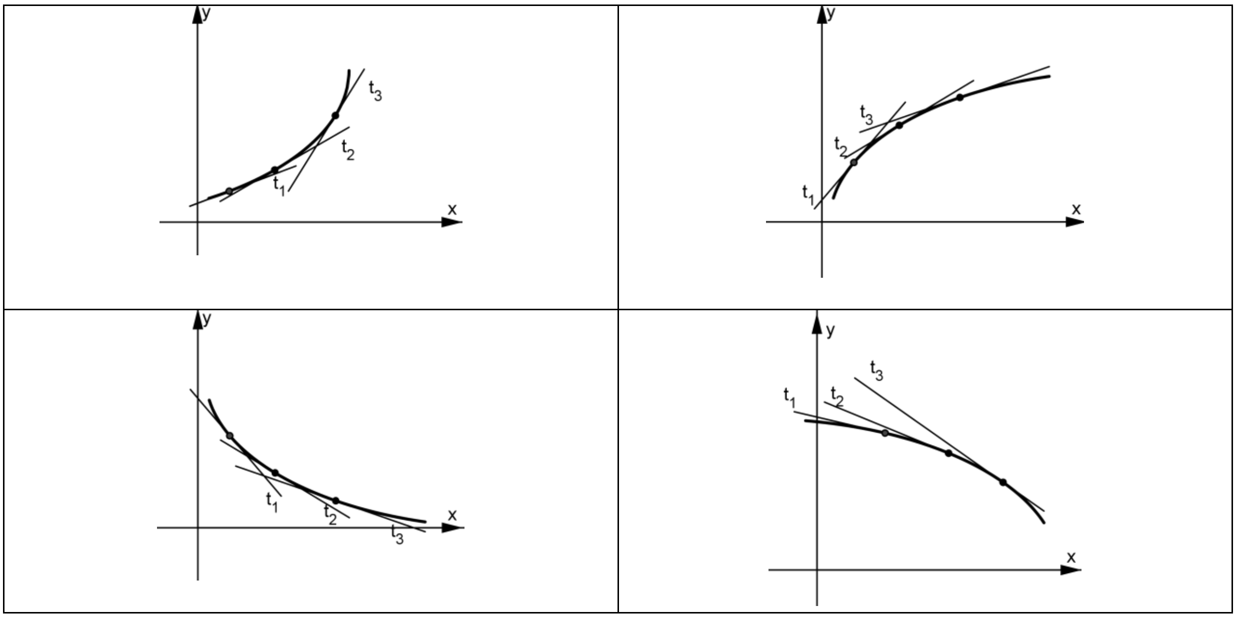
5. $f(x) = \dfrac{(1-3x)\,(-7-3x)}{(1+x)^2}$

1.2 La dérivée seconde

Considérons le graphe d'une fonction y = f(x) dans 4 situations différentes :

- croissante et concavité vers le haut
- décroissante et concavité vers le haut
- croissante et concavité vers le bas
- décroissante et concavité vers le bas

et quelques tangentes à ces graphes.



<u>Observations :</u>

En ce qui concerne les fonctions de la colonne gauche, c-à-d lorsque la fonction tourne sa concavité vers le haut, nous avons : pente t_1 < pente t_2 < pente t_3

Or, les pentes de ces tangentes sont les valeurs de la dérivée aux points considérés.

On peut donc dire que dans ces cas, la dérivée est une fonction croissante $\Leftrightarrow$ (f ')' = f '' est positive.

De même

En ce qui concerne les fonctions de la colonne droite, c-à-d lorsque la fonction tourne sa concavité vers le bas, nous avons : pente t_1 > pente t_2 > pente t_3

On peut donc dire que dans ces cas, la dérivée est une fonction décroissante $\Leftrightarrow$ (f ')' = f '' est négative.

<u>Conclusion</u>

Une courbe tourne sa concavité vers le haut en un point (a, f(a)) $\Leftrightarrow$ f ''(a) > 0
Une courbe tourne sa concavité vers le bas en un point (a, f(a)) $\Leftrightarrow$ f ''(a) < 0

<u>Exemple.</u>

Soit à déterminer les zones de croissance et le sens de la concavité du graphe de la fonction $f(x) = 3x^3 - 2x + 1$

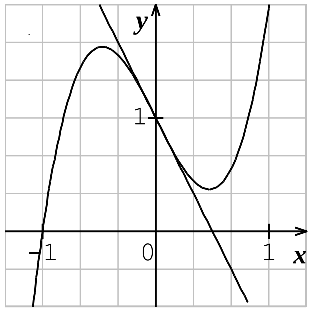
Pour cela, nous calculons les dérivées première et seconde.

$f'(x) = 9x^2 - 2$ Racines : $x^2 = \dfrac{2}{9} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$f''(x) = 18x$ Racine : x = 0

		$-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$		0		$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$	
f '	+	0	-	-	-	0	+
f ''	-	-	-	0	+	+	+
	↗	max	↘	↘	↘	min	↗
	∩	∩	∩	pt. d'infl.	∪	∪	∪

Le graphe de cette fonction tourne donc sa concavité vers le bas pour $x \leq 0$ et vers le haut pour $x \geq 0$
en x = 0, f '' s'annule en changeant de signe : la fonction change le sens de sa concavité.
Au point de vue graphique, en ce point nous aurons un point d'inflexion. En un tel point, la tangente traverse la courbe comme le graphique ci-contre l'illustre.



f admet un point d'inflexion (a, f(a)) $\Leftrightarrow$ f ″ (x) s'annule en changeant de signe en x = a.

Exercices
Déterminer les zones de croissance et de décroissance, les extréma, le sens de la concavité et les points d'inflexion des fonctions suivantes :
1. $f(x) = 9x^3 - 4x$
2. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x$
3. $f(x) = 5x^4 - 3x^2$

2. Etude d'une fonction polynôme

2.1 Exemple

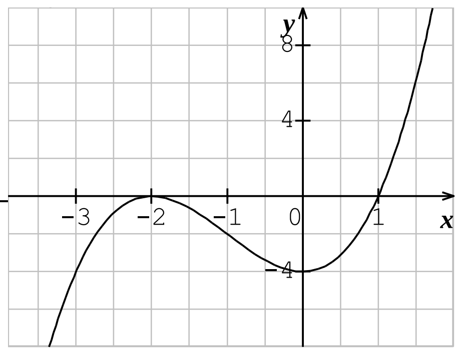
Soit $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$
Nous allons étudier toutes les caractéristiques de cette fonction afin de pouvoir en tracer un graphique précis.
a) dom f = R
b) f(0) = - 4
c) racines : f(1) = 0 $\Rightarrow$ en utilisant la division par (x - 1) par le tableau de Horner, nous obtenons :
   $f(x) = (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = (x - 1)(x + 2)^2$
   Et la fonction admet donc x = 1 et x = - 2 comme racines.
d) Comportement en $\pm\infty$: $\lim\limits_{\pm\infty} x^3 + 3x^2 - 4 = \lim\limits_{\pm\infty} x^3 = \pm\infty$
e) Dérivées première et seconde et leurs racines
   $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$ racines : 0, - 2
   $f''(x) = 6(x + 1)$ racine : - 1
f) Tableau de signes

		- 2		- 1		0	
f '	+	0	-	-	-	0	+
f ''	-	-	-	0	+	+	+
	↗	max	↘	↘	↘	min	↗
	∩	∩	∩	pt. infl.	∪	∪	∪

g) en calculant quelques points supplémentaires du graphe, nous pouvons tracer celui-ci (nous obtiendrons une plus grande précision en prenant plus de points)
   Il sera toujours indispensable de calculer les maxima, minima et points d'inflexion.

N.B. : Pour que le graphique soit plus facile à réaliser, les unités employées sur l ' axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ne sont pas égales.

x	f(x)
- 3	- 4
- 4	- 2
2	16



2.2 Exercices.

Etudier les fonctions polynômes suivantes :
1. $f(x) = - x^3 + 3x^2$
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$
3. $f(x) = x^4 - 2x^2$
4. $f(x) = (x - 1)^3 (3 - x)$
5. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

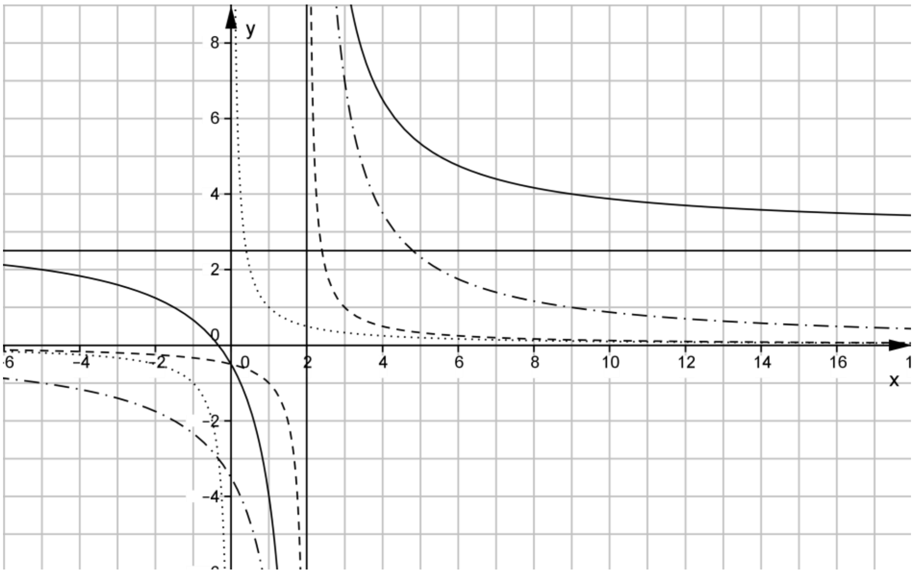
3. Fonctions homographiques

Une fonction homographique est une fonction du type $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

3.1.1 Exemple : $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

Nous constatons : $f(x) = \dfrac{3(x-2)+7}{x-2} = 3 + \dfrac{7}{x-2}$

Cette nouvelle écriture de la fonction f(x) nous permet d'obtenir son graphique par déduction de graphes :



$f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ (·····)

$f_2(x) = \dfrac{1}{x-2}$ (-----)

$f_3(x) = \dfrac{7}{x-2}$ (– · – ·—·)

$f_4(x) = 3 + \dfrac{7}{x-2}$ (——)

3.1.2 Observation

y = 3 est AH du graphe en ± ∞ car $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = 3$ (3 + 0)

x = 2 est AV du graphe car $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 2}} f(x) = 3 + \dfrac{7}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} \dfrac{7}{0^+} = -\infty$

3.1.3 Conclusion

Les graphiques des fonctions homographiques se présentent de façon semblable:
Une AV là où le dénominateur s'annule
Une AH en y = $\lim\limits_{\pm\infty} f(x)$
Il suffit alors de vérifier le comportement de la fonction au voisinage de l'AV (lim à gauche et lim à droite) et de placer la racine et le point d'intersection du graphe avec l'axe des ordonnées.

3.1.4 Exercices

Réaliser l'étude des fonctions suivantes : 1. $f(x) = \dfrac{4x-1}{1-x}$ 2. $f(x) = \dfrac{2x+3}{2x-3}$

4. Fonctions rationnelles

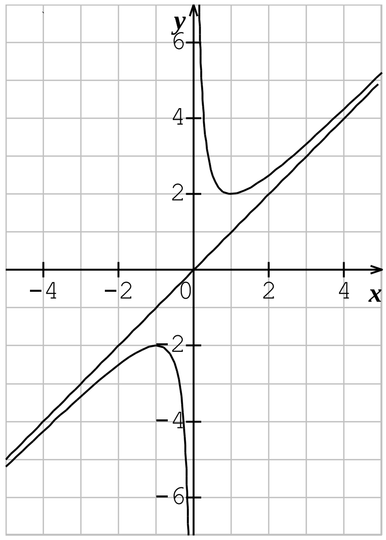
4.1 Exemple

Soit f(x) = $\dfrac{x^2+1}{x}$

dom f = R^0

f(-x) = - f(x) ⇔ f est une fonction impaire et son graphe est symétrique par rapport au centre O.

Calculons quelques valeurs de la fonction



x	f(x)
± 3	± 10/3
± 2	± 5/2
± 1	± 2
± 1/2	± 5/4
± 1/3	± 10/3
0	n'existe pas

En plaçant ces points, nous obtenons le graphe ci-contre.

Observations

f(x) peut se mettre sous la forme x + $\dfrac{1}{x}$, ce qui nous permet de dire que lorsque x tend vers ± ∞, la quantité $\dfrac{1}{x}$ devient négligeable et la fonction tend vers la valeur de x: la différence entre x + $\dfrac{1}{x}$ (valeur de la fonction) et x (valeur de l'ordonnée du point de même abscisse sur la droite y = x) devient négligeable. La droite y = x est une asymptote oblique de la fonction y = f(x) (qui peut également être déterminée par le calcul des coefficients comme nous l'avons vu précédemment)

4.2 Plan de travail

Pour étudier une fonction rationnelle, nous suivrons le plan suivant (déjà utilisé pour l'étude des polynômes où on ajoutera simplement la recherche d'éventuelles asymptotes)

a) Domaine - f(0) - racines - parité
b) Asymptotes (verticales, horizontales, obliques)
c) Dérivée première et son signe
d) Dérivée seconde et son signe
e) Tableau de variation
f) Graphe.

4.3 Application :f(x) = $\dfrac{x^2-1}{x+2}$

a) dom f : R \ {-2}

f(0) = $-\dfrac{1}{2}$ racines : ± 1

f(-x) = $\dfrac{x^2-1}{-x+2}$ ≠ f(x) et ≠ - f(x) ⇒ la fonction n'est ni paire ni impaire.

b) <u>Asymptotes</u>.

AV : $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \lim\limits_{x\to-2} (x^2-1) \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{1}{x+2} = 3 \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{1}{x+2}$ qui se décompose en

$3 \lim\limits_{\substack{< \\ x\to-2}} \dfrac{1}{x+2} = 3 \,.\, -\infty = -\infty$ tandis que $3 \,.\, \lim\limits_{\substack{< \\ x\to-2}} \dfrac{1}{x+2} = 3 \,.\, +\infty = +\infty$

et la droite x = - 2 est bien AV du graphe.

AO : a = $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+2x} = 1$

b = $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x+2} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1-x^2-2x}{x+2} = -2 \Rightarrow$ A0 : y = x - 2

Remarque : La détermination de l'asymptote oblique peut également se faire par la division euclidienne; nous obtenons : f(x) = x - 2 + $\frac{1}{x+2}$ et donc la droite d ≡ y = x - 2 est AO de f

(lorsque x tend vers l'infini, $\frac{1}{x+2}$ devient négligeable et la fonction tend vers x - 2)

a) $f'(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$ ρ =16 - 4 = 12 ⇒ racines = $-2 \pm \sqrt{3}$

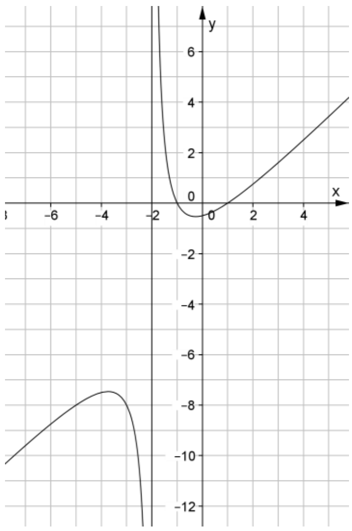
$f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$

b) Tableau de variation

x		$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$	
f '	+	0	-	|	-	0	+
f ''	-	-	-	|	+	+	+
f	↗	max	↘	|	↘	min	↗
	∩	∩	∩	|	∪	∪	∪

e) Graphique.
Calculons au moins les valeurs des maximum et minimum.

x	f(x)
$-2-\sqrt{3}$	-7.46
$-2+\sqrt{3}$	-0.53



Nous pouvons alors tracer le graphique en tenant compte de toutes les caractéristiques déterminées.
Si nous voulons plus de précision, il suffira de calculer plus de valeurs.

Remarque
Si l'on utilise la méthode de la division euclidienne pour la détermination des asymptotes, on peut aisément montrer qu'une fonction rationnelle (quotient de 2 polynômes)

- admet une asymptote horizontale lorsque le degré du numérateur est ≤ degré du dénominateur.
- admet une asymptote oblique lorsque le degré du numérateur = le degré du dénominateur + 1
- n'admet ni asymptote horizontale ni asymptote oblique dans les autres cas (c. - à -d. lorsque le degré du numérateur > degré du dénominateur + 1

4.4 Exercices.

Réaliser l'étude complète des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-3}$
2. $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-1}$
3. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$
4. $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$
5. $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2}$
6. $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3-1}$
7. $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$
8. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$
9. $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$
10. $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^3}$

5. Fonctions trigonométriques

5.1 Fonctions déduites des fonctions de base

Beaucoup de fonctions trigonométriques peuvent être obtenues à partir des fonctions de base (comme nous l'avons réalisé dans le chapitre sur les fonctions déduites).
Exercices : étudier les fonctions suivantes en les déduisant des fonctions de base:

1. $f(x) = \sin 2x$
2. $f(x) = |\cos x|$
3. $f(x) = \cos \frac{x}{2}$
4. $f(x) = 1 + \sin x$
5. $f(x) = - 2 \sin x$
6. $f(x) = 2 - 3 \cos x$
7. $f(x) = \operatorname{tg} 3x$
8. $f(x) = 2 - \operatorname{tg} x$
9. $f(x) = 3 - 2 \sin(2x - \frac{\pi}{2})$
10. $f(x) = 2 + \cos(\frac{x}{2} + \pi)$
11. $f(x) = 3 - \operatorname{tg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$

5.2 Etudier la croissance et la décroissance ainsi que le sens de la concavité des fonctions suivantes. Vérifier votre résultat à l'aide de la calculatrice.

1. $f(x) = \cos^2 x$
2. $f(x) = \sin x + \cos x$
3. $f(x) = x - \sin x$
4. $f(x) = \sin 2x + 2 \cos x$

5.3 Exercices de synthèse

5.3.1 Tangentes

Soit $f(x) = 2 + \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$

a) Tracer le graphe de cette fonction sur l'intervalle $[0, 4\pi]$

b) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de cette fonction en son point d'abscisse $x = \frac{\pi}{2}$

c) Déterminer les équations des tangentes au graphe de cette fonction dont la pente vaut 0.25
Vérifier graphiquement vos résultats.

<u>Solutions</u> : b) $t_1 \equiv y - 0.5\,x - 2 + \frac{\pi}{4} = 0$ c) $t_2 \equiv y - 0.25\,x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} = 0$

$t_3 \equiv y - 0.25\,x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{12} = 0$

5.3.2 Intersection de fonctions - tangentes

a) Tracer les graphes des fonctions suivantes sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ (sur un même graphique) :
$f(x) = 2 + \cos x$ et $g(x) = \cos^2 x$ (utiliser les formules de trigonométrie et les graphes déduits)

b) Rechercher les points d'intersection de ces courbes analytiquement.

c) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de g(x) en son point d'abscisse $x = \frac{\pi}{4}$

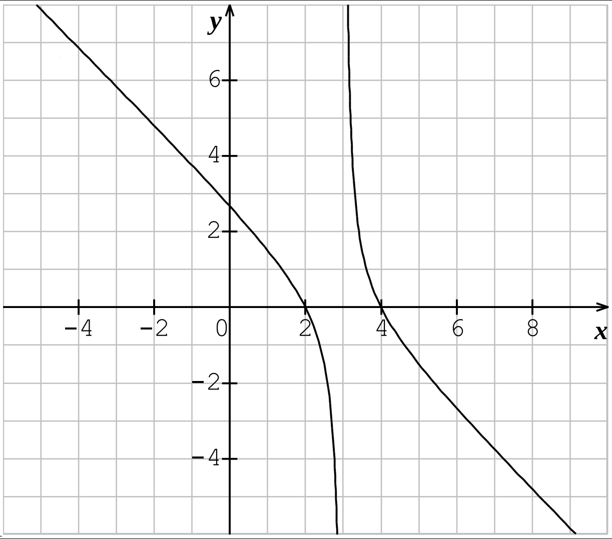
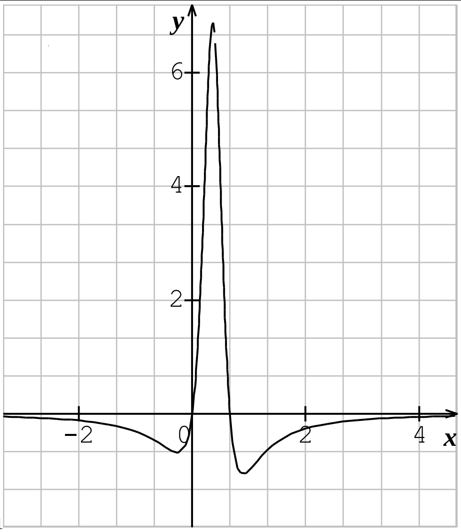
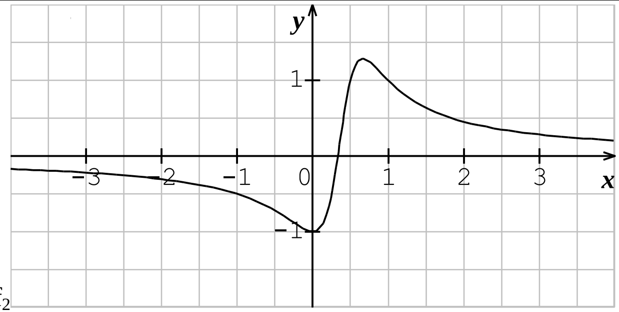
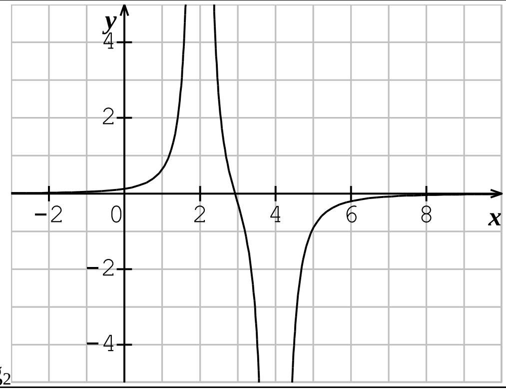
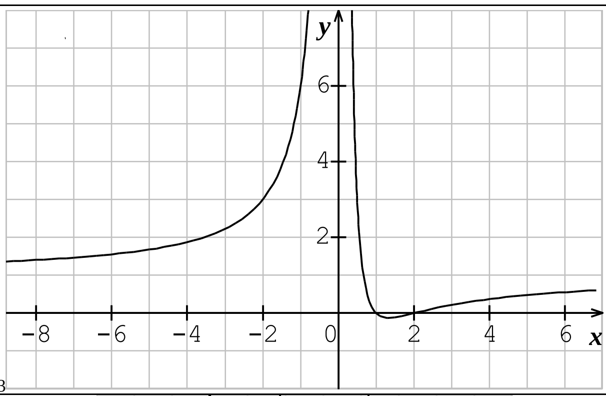
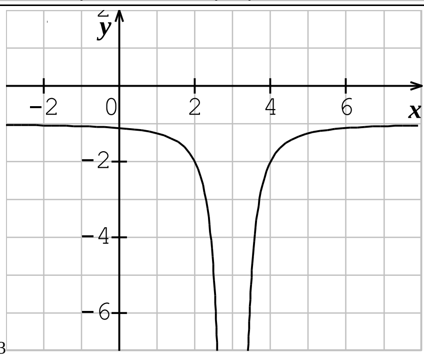
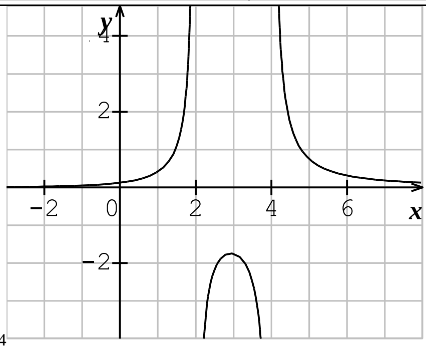
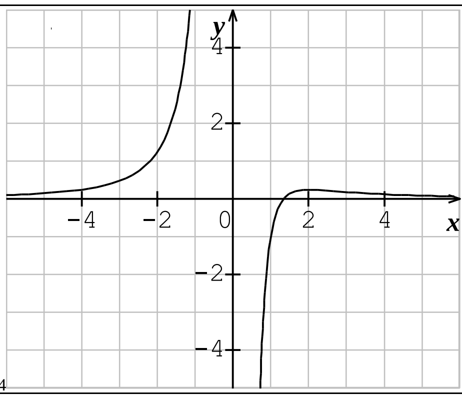
d) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f dont la pente vaut $\frac{1}{2}$

e) Vérifier les résultats trouvés en b), c), et d) sur le graphique.

<u>Solutions</u> : b) $x = \pi + k\,2\pi$ c) $t_1 \equiv y + x - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = 0$

d) $t_2 \equiv 2y - x - 4 + \sqrt{3} + \frac{7\pi}{6} = 0$ $t_3 \equiv 2y - x - 4 - \sqrt{3} + \frac{11\pi}{6} = 0$

5.3.3 Associer les graphes des fonctions suivantes aux graphes de leurs fonctions dérivées :
(Justifier votre réponse)

Fonctions	Fonctions dérivées
 f_1	 g_1
 f_2	 g_2
 f_3	 g_3
 f_4	 g_4

5.3.4 Associer à chaque fonction proposée le graphe qui lui correspond. Donner pour chaque fonction <u>2 éléments</u> (asymptotes, extrémum, racines, …) qui ont déterminé votre choix (expliquer)

$f_1(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$ $\qquad f_2(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x-2}$

$f_3(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ $\qquad f_4(x) = \dfrac{x-3}{x-2}$