V. Dérivées.

1. Problèmes d'introduction : de la position à la vitesse.

A. Un mobile se déplace sur une droite graduée durant 6 secondes. Les graphiques suivants expriment la position du mobile par rapport à l'origine en fonction du temps durant 3 périodes distinctes de 6 secondes. Attention, ces graphiques ne doivent pas être confondus avec la trajectoire (rectiligne). Ils ne représentent pas non plus le profil d'une route…

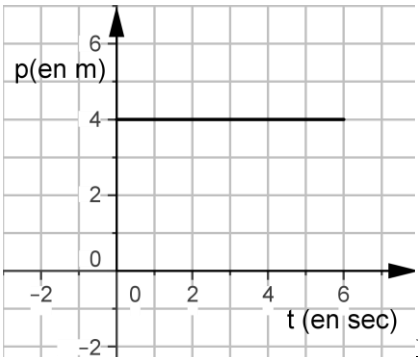


Fig. 1

figure 1

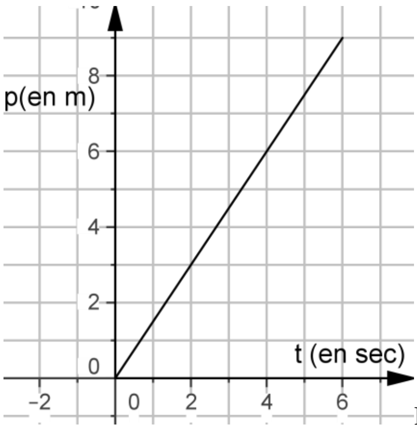


Fig. 2

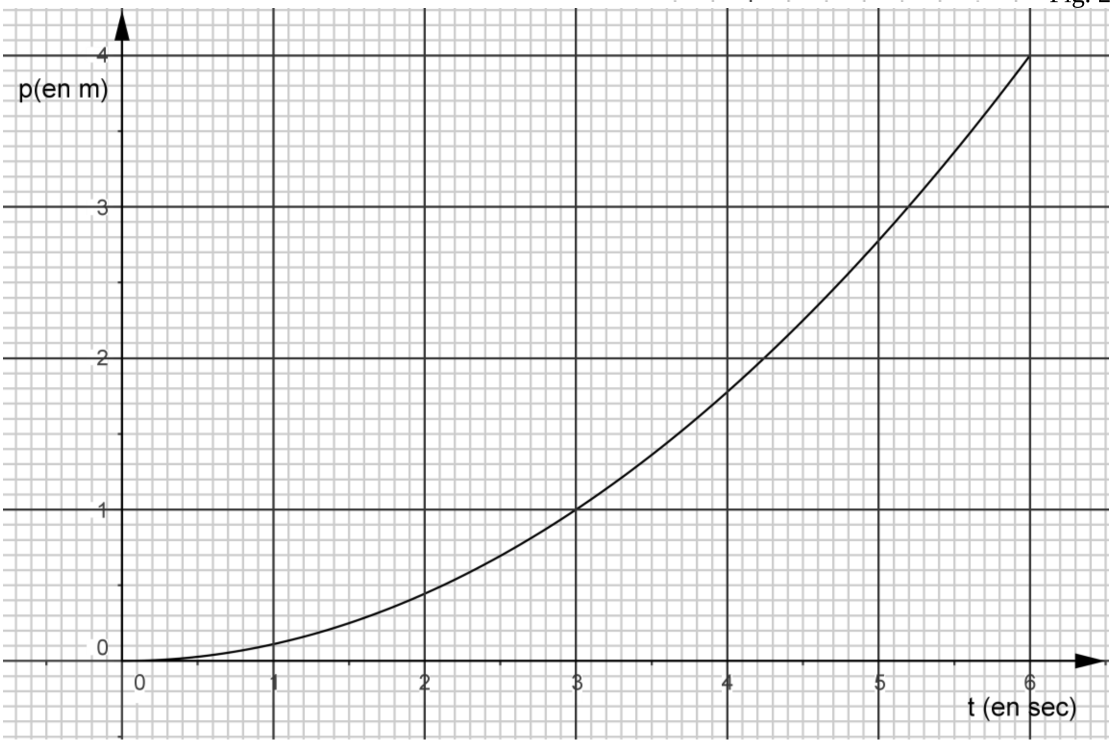
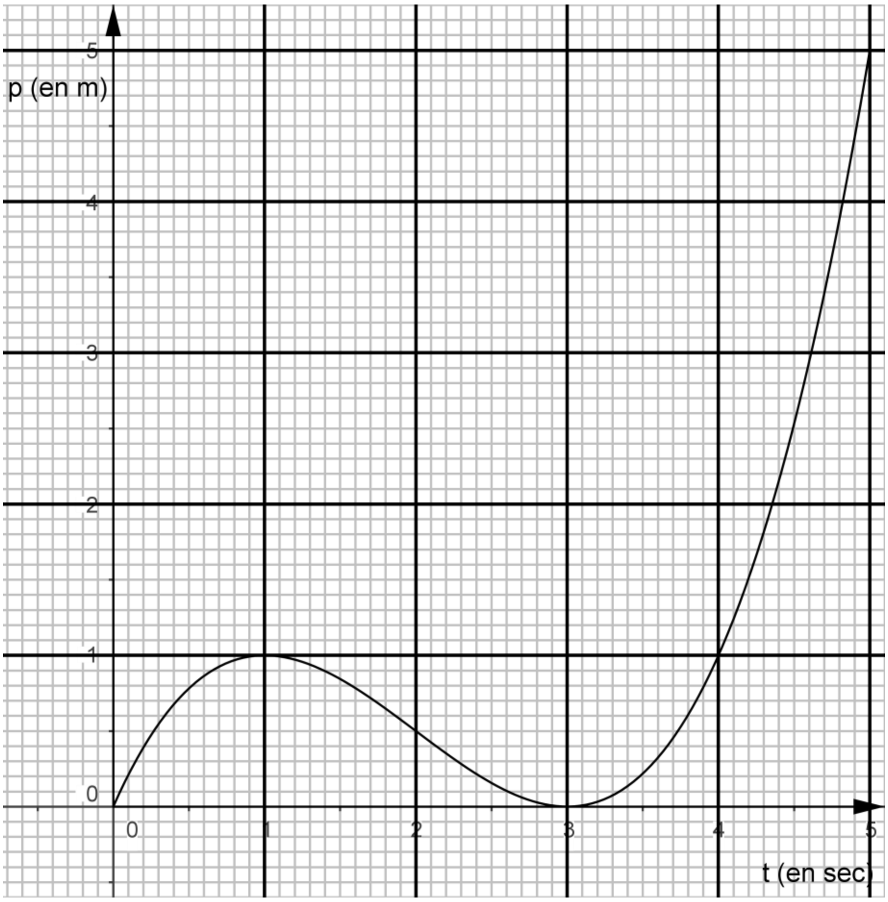


Fig 3

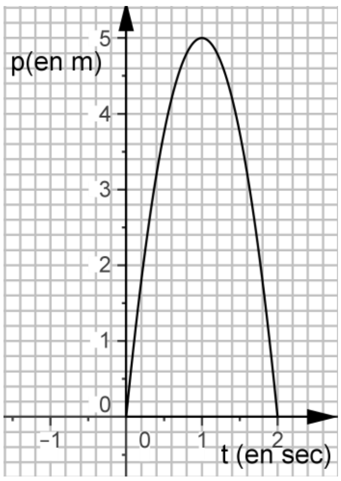
Dans chaque cas, on demande

1. d'évaluer la vitesse moyenne du mobile entre les instants t = 0 et t = 6
2. d'évaluer la vitesse moyenne du mobile entre les instants t = 0 et t = 3 ensuite d'évaluer la vitesse moyenne du mobile entre les instants t = 3 et t = 6 et de comparer les résultats obtenus
3. D'évaluer la vitesse moyenne du mobile entre les instants t = 0 et t = 1, t = 1 et t = 2, ….t = 5 et t = 6
4. d'estimer la vitesse du mobile à l'instant t = 2. (Avant de répondre à cette question, réfléchir à ce que veut dire "vitesse à un instant donné" ou "vitesse instantanée")
5. (uniquement pour le $3^{\text{ème}}$ cas) d'évaluer l'instant où la vitesse du mobile vaut 1 ?
6. D'estimer la vitesse du mobile aux instants t = 0, t = 0.5, t = 1 …et à partir des résultats obtenus, d'esquisser un graphique de la vitesse du mobile en fonction du temps
7. de décrire le mouvement du mobile (avance ou recule, accélère ou freine).

B Comme dans les cas précédents, une particule se déplace sur une droite graduée durant 5 secondes. Le graphique exprime la position de la particule en fonction du temps.



a) Décrire le mouvement de la particule (avance ou recule ?)
b) Evaluer la vitesse moyenne de la particule
   1° entre t = 0 et t = 1 — 2° entre t = 1 et t = 2
   3° entre t = 2 et t = 3 — 4° entre t = 3 et t = 4
   5° entre t = 4 et t = 5
c) Dresser un tableau de valeurs de la vitesse durant les 5 secondes du mouvement en estimant celle-ci toutes les 0.5 secondes
d) En utilisant ce tableau, esquisser un graphique de la vitesse de la particule en fonction du temps.
e) Comment évolue la vitesse entre les instants t = 0 et t = 2 ? Et entre t = 2 et t = 5 ? Préciser la différence d'évolution. Comment cela se remarque-t-il sur le graphe de la position ?



C. Au cours de physique de 4ème , nous avons étudié le mouvement d'un corps lancé verticalement vers le haut avec une vitesse initiale égale à v_0. Nous avons vu que dans ce cas, la position de la balle (hauteur) est donnée par la fonction $p(t) = v_0\,t - \frac{gt^2}{2}$ et que sa vitesse en fonction du temps est donnée par $v(t) = v_0 - gt$
Le graphique ci-contre représente la hauteur de la balle en fonction du temps dans le cas où $v_0 = 10$ m/s. (pour faciliter les calculs, nous avons pris $g = 10 m/s^2$)
a) Déterminer la vitesse de la balle en t = 0, en t = 1, en t = 2 et en t = 4 de deux manières différentes (par les formules vues en physique et par évaluation à partir du graphique comme nous l'avons fait dans les cas précédents). Obtient-on les mêmes résultats ?
b) Quand la balle atteint-elle sa hauteur maximum ? Quelle est sa vitesse à ce moment ?
c) Esquisser un graphique de la vitesse de la balle en fonction du temps

Observations
Dans chacun des exemples précédents, ayant le graphe de la fonction qui exprime la position d'un mobile en fonction du temps, nous en avons déduit (de manière approchée dans les 4 premiers cas et de manière exacte dans le dernier) le graphe de la vitesse en fonction du temps. Nous appellerons cette nouvelle fonction, la fonction dérivée de la fonction initiale.
Nous n'avons ici rencontré que le cas "position – vitesse", mais on peut montrer que le problème est le même dans les situations : "vitesse - accélération", "volume – débit" ou encore "énergie - puissance"
Nous avons déjà pu sentir toute l'importance de cette fonction dérivée à travers les liens observés entre

- signe de la dérivée et croissance de la fonction
- zéros de la dérivée et extrémas de la fonction
- croissance de la dérivée et sens de la concavité de la fonction

A travers ces différents exemples, nous avons approché le problème fondamental des dérivées.
Nous allons maintenant préciser notre démarche, afin de pouvoir déterminer l'expression analytique de la fonction dérivée d'une fonction quelconque.

2. Accroissement – taux d'accroissement moyen

A travers les exemples donnés ci-dessus, on se rend compte qu'il va être nécessaire de travailler sur de petits intervalles et que la notion d'accroissement va être très importante. C'est pourquoi nous allons maintenant la préciser.

2.1 Accroissement de la variable x (Δx)

La variable x change de valeur : Si x passe de 5 à 7, $\Delta x = 2$
Si x passe de 5 à 2, $\Delta x = -3$

Δx = accroissement de la variable x = valeur "finale" - valeur "initiale" de la variable
Selon que Δx est supérieur à 0 ou inférieur à 0, l'accroissement de la variable x est une augmentation ou une diminution.

2.2 Accroissement d'une fonction f(x) ($\Delta f = \Delta y$)

Comme la variable x, f(x) change de valeur.
Si x passe de x à $x + \Delta x$ alors f passe de f(x) à $f(x + \Delta x)$
$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$
Selon que Δf est supérieur à 0, inférieur à 0, ou égal à 0, la fonction f a augmenté, diminué ou est restée constante.

2.3 taux d'accroissement moyen

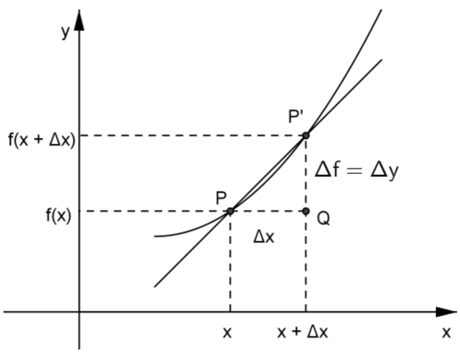
t.a.m = $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ c-à-d le rapport entre l'accroissement de f et l'accroissement correspondant de x
On parle d'accroissement "moyen" sur l'intervalle $[x, x + \Delta x]$
Cet accroissement moyen dépend de x et de Δx
Il peut être une vitesse moyenne, un débit moyen, une puissance moyenne, une intensité moyenne, une accélération moyenne....

2.4 Signification graphique

Considérons une fonction f définie et continue sur l'intervalle considéré :
$f : x \to f(x)$
Soit P(x, f(x)), et P'($x + \Delta x$, $f(x + \Delta x)$) deux points de cette courbe.
Dans le triangle PQP' ainsi formé, la pente de la droite PP' vaut

$$\frac{\overline{QP'}}{\overline{PQ}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$\Leftrightarrow$ le taux moyen d'accroissement entre P(x, f(x)) et P'($x + \Delta x$, $f(x + \Delta x)$) est la pente de la sécante à la courbe PP'



2.5 Exemples de grandeurs physiques qui sont des t.a.m.

Nous avons déjà rencontré plusieurs de ces grandeurs.

1. Si s(t) décrit la position d'un mobile au cours du temps en MR. alors $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ = vitesse moyenne (en m/s).
2. si V(t) est une fonction qui décrit le volume d'un fluide (liquide ou gaz) qui rentre au cours du temps, alors $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ = le débit moyen (en m^3/s)
3. Si E(t) est l'énergie fournie par une centrale au cours du temps (en joules) alors $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ = la puissance moyenne (en j/s = w)
4. si v(t) est la vitesse d'un mobile au cours du temps en MR. alors $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ = accélération moyenne. (en m/s^2)

3. Dérivée d'une fonction f(x)

3.1 Définition - notations

Une fonction y = f(x) est dite dérivable en x = a lorsque la limite du t.a.m de f en x = a existe.

Cette limite est alors appelée nombre dérivé de f en a $\Rightarrow f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

La fonction dérivée d'une fonction f(x) (ou dérivée de f) est la fonction f '(x) qui, à chaque réel où f est dérivable fait correspondre f ' (a)

L'ensemble des points du domaine de définition de f où f est dérivable est appelé domaine de dérivabilité de la fonction f ; il se note : $dom_d\, f$

La fonction dérivée de la fonction f(x) est notée f '(x)

$$f' : dom_d\, f \to \mathbb{R}: x \to f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = D_x f = y'$$

<u>Notation différentielle</u> : Un accroissement infiniment petit Δx de la variable indépendante x se note dx

A cet accroissement dx correspond un accroissement dy. Et nous avons ainsi : $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$

<u>Remarque</u> : autre notation :
soit a, une valeur de la variable et $a + \Delta x = x$
alors $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ devient $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
f '(a) est le nombre dérivé de f en a. Il est aussi la valeur de la fonction dérivée de f en a.

3.2 Exemples

1. Soit $f(x) = x^2$. Cherchons $f'(x) = (x^2)' = ?$

   $(x^2)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x}$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$
   $= 2x + 0 = 2x$
   Et nous avons donc : $(x^2)' = 2x$
2. soit $f(x) = \sqrt{x}$. Cherchons $(\sqrt{x})' = ?$

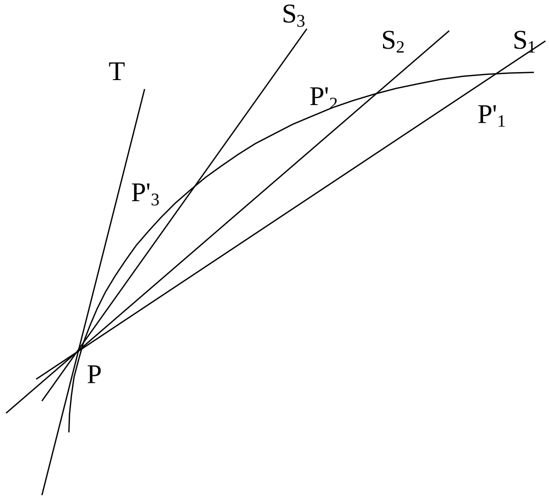
   $\Delta \sqrt{x} = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$

   $$(\sqrt{x})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

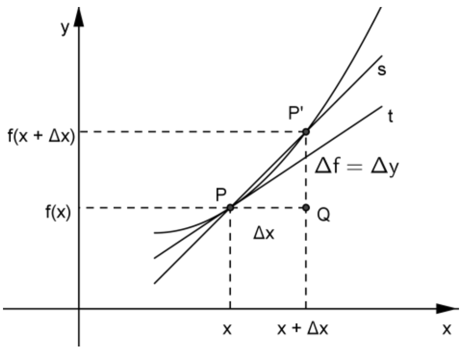
Et nous avons donc : $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3.3 Tangente en un point d'une courbe.



Considérons une courbe. Sur celle-ci un point P.
Soit la sécante passant par P et un point P'_1
Déplaçons P'_1 en le rapprochant de P. Il occupe successivement les positions P'_2 , P'_3.
A la limite, P' va se confondre avec P. A ce moment, la sécante devient tangente à la courbe au point P : elle frôle la courbe en P.
Conclusion : La tangente en 1 point P d'une courbe régulière est la limite d'une sécante passant par P lorsque le second point d'intersection P' tend vers P

3.4 Signification graphique de la dérivée.



Nous savons : $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

Considérons le graphique construit lors de l'étude du t.a.m.
Soit une courbe, et sur celle-ci deux points P(x,f(x)) et P'(x + Δx, f(x + Δx))
Nous obtenons ainsi la sécante PP' dont le coefficient angulaire vaut $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

or $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ = la limite du coefficient angulaire de PP' lorsque P' se rapproche de P c-à-d f '(x) = le coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point P.

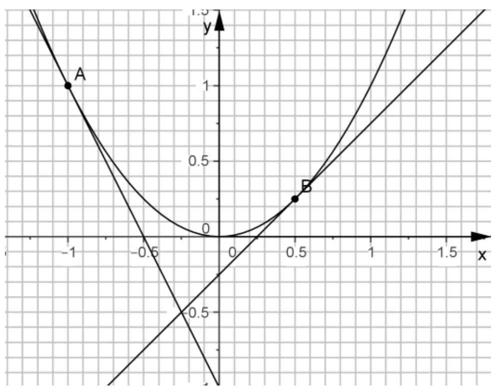
Conclusion.

La dérivée f '(x) d'une fonction f(x) est égale au coefficient angulaire de la tangente au graphique de f(x) au point P d'abscisse x.

3.5 Application

On considère la fonction $f(x) = x^2$

A point 3.2, nous avons calculé la fonction dérivée de cette fonction vaut : f '(x) =2x



Que vaut le coefficient angulaire de la tangente au graphique de cette fonction aux points d'abscisses -1, 0, et 1/2 ?
Calculer l'angle que fait chacune de ces tangentes avec l'axe des x.

Vérifier vos résultats sur le graphique ci-contre.

L'observation du graphique précédent, nous montre que la tangente à une courbe est la droite qui approche le mieux le graphe de la fonction. On pourrait encore mieux s'en rendre compte en utilisant un logiciel permettant de tracer des fonctions et en effectuant un "zoom" autour du point de tangence.

Recherchons l'équation de la tangente au point B(0.5, 0.25)
La pente de cette tangente vaut 2 . 0.5 = 1
$\Rightarrow t \equiv y - 0.25 = 1\ (x - 0.5) \Leftrightarrow y = x - 0.25$

Pour des valeurs de x "proches" de 0.5, la fonction g(x) = x – 0.25 est une bonne approximation de la fonction f(x).
Plus x est éloigné de 0.5, moins bonne est l'approximation. Le tableau de valeurs ci-contre nous le prouve.

x	f(x)	g(x)	|f(x)-g(x)|
0.3	0.09	0.05	0.04
0.35	0.1225	0.1	0.0225
0.4	0.16	0.15	0.01
0.45	0.2025	0.2	0.0025
0.48	0.2304	0.23	0.0004
0.49	0.2401	0.24	0.0001
0.51	0.2601	0.26	0.0001
0.52	0.2704	0.27	0.0004
0.54	0.2916	0.29	0.0016

3.6 Exercices.

1. Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.
   a) Que vaut la dérivée de cette fonction ?
   b) Calculer la pente de la tangente au graphe de f(x) au point d'abscisse égal successivement à 1, 1/4 et 0
   c) Tracer le graphe de cette fonction en tenant compte des 3 tangentes envisagées (échelle : 1 = 4cm).
2. On considère la fonction $f(x) = x^3$.
   a) Calculer la dérivée de cette fonction.
   b) Que valent les pentes des tangentes aux points d'abscisse -1, -1/2, 0, 1/2, et 1 ?
   c) Tracer ces 5 tangentes et le graphique de f(x) en tenant compte de ces tangentes.
3. On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$.
   a) Calculer la dérivée de cette fonction.
   b) Déterminer les équations des tangentes au graphe de cette fonction aux points d'abscisses -1,0, 1,2, 3.
   c) Tracer le graphique de f(x) et ces 5 tangentes.
4. Le mouvement d'un mobile en MRUA est décrit par la fonction position (= la "loi de l'espace")

   $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0\,t + s_0$ où v_0 est sa vitesse en t = 0 et s_0 son abscisse à l'instant t = 0.

   Déterminer les fonctions qui caractérisent la vitesse et l'accélération de ce mobile.(= les "lois de sa vitesse et de son accélération")

3.7 Dérivabilité à gauche et à droite

Soit $f : R \to R : x \to f(x)$ $a \in \text{dom } f$

a) Une fonction est dite dérivable à gauche en a ssi $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ <}} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ existe et $\in$ R. Dans ce cas, cette limite porte le nom de nombre dérivée à gauche de f et se note $f_g'(a)$

b) Une fonction est dite dérivable à droite en a ssi $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ >}} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ existe et $\in$ R. Dans ce cas, cette limite porte le nom de nombre dérivé à droite de f et se note $f_d'(a)$

c) f est dite dérivable en un point a ssi elle est dérivable à gauche et à droite et que $f_g'(a) = f_{d'}(a)$

d) f est dérivable sur une partie A de R ssi elle est dérivable en tout point de cet ensemble.

3.8 Lien entre dérivabilité et continuité

<u>Propriété</u> : Soit $f : R \to R$ et $a \in R$ f est dérivable en a $\Rightarrow$ f est continue en a.

En effet : f est dérivable en a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ existe et $\in$ R

Or, si $x \neq a$, nous avons : $\Leftrightarrow f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,(x-a) + f(a)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)+f(a)\right) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ \lim_{x\to a}(x-a) + \lim_{x\to a} f(a) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)$$

car $f'(a) \in R$

N.B. la réciproque de cette propriété est fausse. En effet, considérons la fonction $f : R\to R : f(x) = |x|$

On montre aisément que cette fonction est continue en $x = 0$ mais n'est pas dérivable en $x = 0$

4. Règles de calcul des dérivées.

4.1 Dérivée d'une constante

Soit $f(x) = c$

Le graphe de cette fonction est une droite horizontale qui a pour tangente elle-même. La pente de cette tangente est donc constamment égale à 0. On peut donc prévoir que la dérivée de cette fonction sera la fonction nulle, ce qui se vérifie aisément par le calcul:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0 \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$$

<u>conclusion</u> :

$$\boxed{(c)' = 0}$$

4.2 Dérivée de la fonction identique : f(x) = x

soit $f(x) = x$

$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x) - x = \Delta x$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 1 = 1$$

<u>conclusion</u> :

$$\boxed{(x)' = 1}$$

4.3 Dérivée de k.f

Soit $y = k.f(x)$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{kf(x+\Delta x)-kf(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} k\,\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = k\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = k\,f'(x)$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{(k.f)'(x) = k \cdot f'(x)}$$

<u>Exercices</u> :

1. $(3x)' =$
2. $(5x)' =$

4.4 Dérivée de $f \pm g$

Soit $y = (f+g)(x)$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(f+g)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f+g)(x+\Delta x)-(f+g)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-(f(x)+g(x))}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f+\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta g}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x} = f' + g'$$

On procède de même pour $(f - g)(x)$

<u>conclusion</u> :

$$\boxed{(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)}$$

<u>Exercices</u> :

$(3x + 5)' =$

$(7x - 2)' =$

$(4 - 3x)' =$

4.5 Dérivée d'un produit : f.g

Soit y = (f.g) (x)

$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \Rightarrow f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f$

De même : $\Delta g = g(x + \Delta x) - g(x) \Rightarrow g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g$

$\Delta y = f(x + \Delta x)\, g(x + \Delta x) - f(x)\, g(x) = (f(x) + \Delta f)\,(g(x) + \Delta g) - f(x).g(x)$

$= f(x).g(x) + \Delta f.g(x) + f(x).\Delta g + \Delta f.\Delta g - f(x).g(x) = \Delta f.g(x) + f(x).\Delta g + \Delta f.\Delta g$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f.g(x) + f(x).\Delta g + \Delta f.\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f.g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x).\Delta g}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f.\Delta g}{\Delta x}$$

$$= g(x).\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + f(x).\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta g \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = g(x).\,f'(x) + f(x)\,.\,g'(x) + 0$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{(f.g)'(x) = f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x)}$$

<u>Exercices</u> :

$((2x - 3)\,.\,(1 - 5x))' =$

$((3 - 4x)\,.\,(5x - 2))' =$

4.6 Dérivée de $f^n(x)$

1. <u>Dérivée d'un produit de plus de deux termes.</u>

   A partir de la formule précédente, nous obtenons facilement :

   $(f\,.\,g\,.\,h)'(x) = f'(x)\,.\,g(x)\,.\,h(x) + f(x)\,.\,g'(x)\,.\,h(x) + f(x)\,.\,g(x)\,.\,h'(x)$

   de même : $(f\,.\,g\,.\,h\,.\,i)'(x) =$

   $f'(x)\,.\,g(x)\,.\,h(x)\,.\,i(x) + f(x)\,.\,g'(x)\,.\,h(x)\,.\,i(x) + f(x)\,.\,g(x)\,.\,h'(x)\,.\,i(x) + f(x)\,.\,g(x)\,.\,h(x)\,.\,i'(x)$

2. <u>Montrons que $\forall n \in N : (f^n)'(x) = n\, f^{n-1}(x)\, f'(x)$</u>

   (pour alléger l'écriture, nous n'écrirons pas la variable)

   Nous allons démontrer cette propriété "par récurrence" c. à d.

   a) La propriété est vraie pour n = 2 : en effet : $(f^2)' = f\,f' + f'\,f = 2\,f\,f'$

   N.B. : elle est aussi vérifiée pour n = 0 et n = 1

   b) Montrons que si la propriété est vraie pour n, elle l'est pour n + 1

   En effet : $(f^{n+1})' = (f^n\,.\,f)' = (f^n)'\,.\,f + f^n\,.\,f' = n\,f^{n-1}\,.\,f'\,.\,f + f^n\,.\,f' = n\,f^n\,.\,f' + f^n\,.\,f' = (n + 1)\,f^n\,.\,f'$

   qui nous montre bien que la propriété est vérifiée pour n + 1

   c) par a) et b), nous pouvons conclure que la propriété est vérifiée $\forall n \in N$

   <u>Cas particulier</u> : $\forall n \in N : (x^n)' = n\,x^{n-1}$

3. <u>Nous allons maintenant étendre cette formule au cas où $n \in Z$.</u>

   soit $z \in Z^-$ (entier négatif) et $n \in N$ tel que n = - z

   $f^n\,.\,f^{-n} = 1$ (fonction constante 1) : nous allégerons à nouveau l'écriture en supprimant la variable x

   $\Rightarrow (f^n\,.\,f^{-n})' = 1' \Leftrightarrow (f^n)'\,(f^{-n}) + f^n\,(f^{-n})' = 0 \Leftrightarrow n\,f^{n-1}\,f'\,(f^{-n}) + f^n\,(f^{-n})' = 0$

   $\Leftrightarrow f^n\,(f^{-n})' = -\,n\,f^{n-1}\,f'\,(f^{-n}) \Leftrightarrow (f^{-n})' = -\,n\,f^{n-1}\,f'\,(f^{-n})\,(f^{-n}) \Leftrightarrow \quad (f^{-n})' = -\,n\,f^{-n-1}\,f'$

   $\Leftrightarrow (f^z)' = z\,f^{z-1}\,f'$

   <u>Cas particulier</u> :

   $\forall z \in Z : (x^z)' = z\,x^{z-1}$

4. <u>De même, nous pourrons également généraliser cette formule au cas où l'exposant est fractionnaire.</u>

   $z \in Z$, $n \in N$. Soit $y = (f(x))^{z/n}$ pour alléger l'écriture, nous noterons : $y = f^{z/n}$

$\Leftrightarrow y^n = f^z \Rightarrow (y^n)' = (f^z)' \Rightarrow n\,y^{n-1}\,y' = z\,f^{z-1}\,f'$ (car n, z $\in$ Z) $\Rightarrow n\ f^{\frac{z}{n}(n-1)}\,y' = z\,f^{z-1}\,f'$

$$\Rightarrow y' = \frac{z\cdot f^{z-1}f'}{n\cdot f^{z-\frac{z}{n}}} = \frac{z}{n}\cdot f^{z-1-z+\frac{z}{n}}\cdot f' = \frac{z}{n}\cdot f^{\frac{z}{n}-1}\cdot f'$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall\, q \in Q : (f^q)'(x) = q\,f^{q-1}(x)\,f'(x)\\ (x^q)' = q\,x^{q-1}\end{array}}$$

<u>Cas particulier :</u> $\left(\sqrt{f(x)}\right)'$

en effet : $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \left((f(x))^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(f(x))^{-\frac{1}{2}}\,f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

<u>Conclusion :</u>

$$\boxed{\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}}$$

<u>et en particulier :</u>

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

<u>Exercices</u> :(Avec solutions finales parfois)

1. $(x^3)' =$
2. $(5x^3)' =$
3. $(x^4 + x^6)' =$
4. $(5x^2 + 3x - 2)' =$
5. $(7x^5 - 3x^4 + 3x)' =$
6. $((1 - 3x)^3)' =$
7. $((2x^2 - 3x)^5)' =$
8. $(5(3x - 2)^2)' =$
9. $((3x^4 - 2x)(x^3 - 6))' = 21x^6 - 80x^3 + 12$
10. $(4(3x^6 - 2x^2))' = 8(9x^5 - 2x)$
11. $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$
12. $\left(\frac{5}{x^3}\right)' = \frac{-15}{x^4}$
13. $\left(\sqrt{3x}\right)' = \frac{3}{2\sqrt{3x}}$
14. $\left(-\frac{1}{x^5}\right)' = \frac{5}{x^6}$
15. $\left(\frac{4}{(4-x)^3}\right)' = \frac{12}{(4-x)^4}$
16. $\left(x\sqrt{x}\right)' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
17. $\left(\frac{1}{4}\sqrt[5]{x}\right)' = \frac{1}{20\sqrt[5]{x^4}}$
18. $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)' = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$
19. $\left(6\sqrt[4]{x^3}\right)' = \frac{9}{2\sqrt[4]{x}}$
20. $((3x - 5)^2(1 - 2x))' = (3x - 5)(16 - 18x)$
21. $((2x + 3)^3(3 - 2x)^2)' =$
    $(2x + 3)^2(3 - 2x)(6 - 20x)$

4.7 Dérivée de 1/f

soit $y = \frac{1}{f}(x) \Rightarrow y' = (f^{-1})' = -f^{-2}\,f' = \frac{-f'}{f^2}$

<u>conclusion</u> :

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}}$$

<u>et en particulier</u> :

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}}$$

4.8 Dérivée d'un quotient : f/g

Soit $y = \frac{f}{g}(x) \Rightarrow y' = (f \cdot \frac{1}{g})' = f'\frac{1}{g} + f\,(\frac{1}{g})' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \frac{-g'}{g^2} = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$

Conclusion :

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}}$$

Exercices : (avec solutions finales)

1. $\left(\frac{3x-2}{4x}\right)' = \frac{1}{2x^2}$
2. $\left(\frac{2x-1}{1-x^2}\right)' = \frac{2x^2-2x+2}{(1-x^2)^2}$
3. $\left(\frac{5}{2-3x^2}\right)' = \frac{30x}{(2-3x^2)^2}$
4. $\left(\frac{4x^2-1}{3x-2}\right)' = \frac{12x^2-16x+3}{(3x-2)^2}$
5. $\left(\frac{8x-3}{4x^2-3x+1}\right)' = \frac{-32x^2+24x-1}{(4x^2-3x+1)^2}$
6. $\left(\frac{1-2x}{(x^2-3)^5}\right)' = \frac{18x^2-10x+6}{(x^2-3)^6}$
7. $\left(\frac{3+x}{(1-2x^2)^3}\right)' = \frac{10x^2+36x+1}{(1-2x^2)^4}$
8. $\left(\frac{(1-4x)^2}{(2x+3)^3}\right)' = \frac{(1-4x)(8x-30)}{(2x+3)^4}$
9. $\left(\frac{2(1-3x)}{(4+2x)^2}\right)' = \frac{4(3x-8)}{(4+2x)^3}$

4.9 Dérivée de la composée de 2 fonctions.

Certaines fonctions peuvent s'écrire comme la composée de deux autres. g (f (x))= (g ∘ f) (x)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & g(x) \arrow[r, bend left, "f"] & f(g(x)) \end{tikzcd}$$

Exemples :

1. $g(x) = (3x - 2)^2$ est la composée de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $x \to f(x) = 3x - 2$
   avec la fonction $g\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to g(x) = x^2$
2. $g(x) = \sqrt{5x} = \sqrt{f(x)}$ avec $f(x) = 5x$
3. $g(x) = \sin 2x = \sin f(x)$ avec $f(x) = 2x$

On peut montrer pour 2 fonctions dérivables f et g :

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

qui peut s'écrire en notation différentielle:

$$\boxed{\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}}$$

En effet : $(g \circ f)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(g \circ f)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g \circ f(x+\Delta x) - g \circ f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{f(x+\Delta x) - f(x)} \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{f(x+\Delta x) - f(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x)+\Delta f) - g(f(x))}{\Delta f} \cdot f'(x)$

Lorsque $\Delta x \to 0 : \Delta f \to 0 \Rightarrow (g \circ f)'(x) = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{g(f(x)+\Delta f) - g(f(x))}{\Delta f} \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Application :

1. $((3x - 2)^2)' = 2\,(3x - 2)\,3 = 6\,(3x - 2)$
2. $\left(\sqrt{5x}\right)' = \dfrac{5}{2\sqrt{5x}}$

4.10 Dérivées des fonctions trigonométriques.

4.10.1 Calcul de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

Calculons les valeurs du quotient $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de zéro.

x (en radians)	$\dfrac{\sin x}{x}$
1	0.841471
0.1	0.9983342
0.01	0.9999833
0.001	0.9999998
.....	......

Numériquement nous vérifions aisément la valeur de cette limite.

Remarque : si x est exprimé en degrés, le quotient ne tend pas vers 1. En effet, recalculons les valeurs du tableau précédent pour x exprimé en degrés.

x (en degrés)	$\dfrac{\sin x}{x}$
1	0.0174524
0.1	0.0174533
0.01	0.0174533
0.001	0.0174533
.....	......

Nous retrouvons ce résultat en nous rappelant : 360° = 2 π radians ⇔ 1° = $\dfrac{2\pi}{360}$ radians = 0,0174533.. radians.

Ce qui nous donne lorsque x est exprimé en degrés : $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}}\dfrac{\sin x}{x} = 0{,}0174533 = \dfrac{2\pi}{360} = \dfrac{\pi}{180} = 0{,}0174533..$

Dans la suite, l'angle x sera toujours supposé exprimé en radians, en particulier pour le calcul des dérivées des fonctions trigonométriques.

Remarque :

On peut également considérer des valeurs de x négatives et obtenir le même résultat car si t = - x alors :

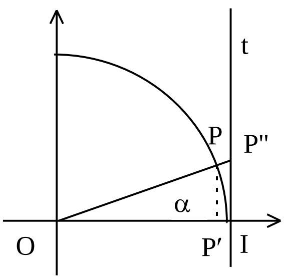
$\dfrac{\sin t}{t} = \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$ car sinus est une fonction impaire et donc : $\lim\limits_{\substack{<\\ t\to 0}}\dfrac{\sin t}{t} = \lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

D'un point de vue géométrique.

Considérons le cercle trigonométrique C(0 , 1)

graphiquement, si x est proche de 0 mais positif, nous observons :

PP' < arc PI < P''I ⇔ sin x < x < tg x



or $\sin x > 0 \Rightarrow 1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x} \Leftrightarrow 1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} 1 \geq \lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}}\dfrac{\sin x}{x} \geq \lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}}\cos x \Leftrightarrow 1 \geq \lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}}\dfrac{\sin x}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

De même, si x est proche de 0 mais négatif, nous avons :

sin x > x > tg x

or $\sin x < 0 \Rightarrow 1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x} \Leftrightarrow 1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{<\\ x\to 0}} 1 \geq \lim\limits_{\substack{<\\ x\to 0}}\dfrac{\sin x}{x} \geq \lim\limits_{\substack{<\\ x\to 0}}\cos x \Leftrightarrow 1 \geq \lim\limits_{\substack{<\\ x\to 0}}\dfrac{\sin x}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{<\\ x\to 0}}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

Et finalement : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

A partir de ce développement, on peut retrouver la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ lorsque x est exprimé en degrés.

En effet lorsque x > 0 : $\sin x < \frac{2\pi x}{360} < \operatorname{tg} x$

En poursuivant comme ci-dessus , on trouve : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\sin x}{x} = \frac{2\pi x}{360} \cong 0{,}017$

On peut procéder de même lorsque x < 0 et nous avons alors : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{2\pi x}{360} \cong 0.017$

4.10.2 Dérivées des fonctions trigonométriques.

1. $(\cos x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$

   (par la formule de Simpson : $\cos p - \cos q = -2 \sin\frac{p+q}{2} \sin\frac{p-q}{2}$)

   $= -\lim\limits_{\Delta x\to 0} \sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x. \lim\limits_{\frac{\Delta x}{2}\to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x$ (car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

   En appliquant la formule de la dérivée de la composée de deux fonctions :
   (cos f(x)) ' = (cos)' (f(x)) . f ' (x) = - f ' (x) . sin f(x)

2. $(\sin x)' = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).(-1) = \cos x$

   En appliquant la formule de la dérivée de la composée de deux fonctions :
   (sin f(x)) ' = (sin)' (f(x)) . f ' (x) = f ' (x) . cos f(x)

3. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

   et (tg f(x)) ' = (tg)' (f(x)) . f ' (x) = $\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$

4. $(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x\sin x - \cos x\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$

   et (cotg f(x)) ' = (cotg)' (f(x)) . f ' (x) = $\frac{-f'(x)}{\sin^2 f(x)}$

5. <u>Remarque</u> :

   $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ $\qquad$ $(\operatorname{tg} f(x))' = f'(x).(1+\operatorname{tg}^2 f(x))$

   $(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$ $\qquad$ $(\operatorname{cotg} f(x))' = -f'(x).(1+\operatorname{cotg}^2 f(x))$

6. <u>Application</u> :

   a) Calculer les dérivées des fonctions sinus et cosinus pour x successivement égal à 0, π/2, π, 3π/2, 2π. Vérifier graphiquement le résultat obtenu.

   b) Même question pour la fonction tangente pour x successivement égal à 0, π/4 , π/2 , 3π/4 ....

4.11 Exercices : (et solutions finales)

1. $(\cos^3 x)' = -3\cos^2 x \sin x$
2. $(x . \sin x)' = \sin x + x\cos x$
3. $(5\cos^2 x)' = -10\cos x\sin x$
4. $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$
5. $(5\cos 3x)' = -15\sin 3x$
6. $(\operatorname{tg}(5x+\pi/2))' = \frac{5}{\cos^2(5x+\pi/2)}$
7. $\left(\frac{1}{\cos^3 x}\right)' = \frac{3\sin x}{\cos^4 x}$
8. $(2x\cos 5x)' = 2\cos 5x - 10x\sin 5x$
9. $(\sin x . \sqrt{4x})' = \frac{4x\cos x + 2\sin x}{\sqrt{4x}}$

5. Exercices de synthèse.

5.1 Calculs de dérivées

1. $\left((x^3-4)^4\right)' = 12(x^3 - 4)^3\, x^2$
2. $\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \dfrac{-1-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$
3. $\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $(-7\sin^3 2x)' = -42\sin^2 2x \cos 2x$
5. $\left(\dfrac{x}{(x^2-1)^4}\right)' = \dfrac{-1-7x^2}{(x^2-1)^5}$
6. $((1 + \mathrm{tg}\,3x)^3)' = 9\,(1 + \mathrm{tg}\,3x)^2\,(1 + \mathrm{tg}^2\,3x)$
7. $\left(\left(\dfrac{3x+4}{6x-7}\right)^3\right)' = -\dfrac{135(3x+4)^2}{(6x-7)^4}$
8. $\left(\dfrac{2x+3}{\sqrt{4x^2+9}}\right)' = \dfrac{18-12x}{\sqrt{(4x^2+9)^3}}$
9. $\left(\sqrt[3]{x^2+5}\right)' = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+5)^2}}$
10. $\left(\sqrt[3]{\sin^2 5x}\right)' = \dfrac{10\cos 5x}{3\sqrt[3]{\sin 5x}}$
11. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}\right)' = \dfrac{-3}{2\sqrt{(3x-2)^3}}$
12. $\left(\dfrac{1}{(8x-7)^5}\right)' = \dfrac{-40}{(8x-7)^6}$
13. $((6x-7)^3\,(8x^2 + 9)^2)' = 2\,(6x - 7)^2\,(8x^2 + 9)\,(168x^2 - 112x + 81)$
14. $((2x^2 - 3x + 1)\,(3x + 2)^4)' = (3x + 2)^3\,(36x^2 - 37x + 6)$
15. $\left(\dfrac{\cos 4x}{1-\sin 4x}\right)' = \dfrac{4}{1-\sin 4x}$
16. $\left(\left(\dfrac{x^4-1}{x^2}\right)^3\right)' = \dfrac{6(x^4-1)^2(x^4+1)}{x^7}$
17. $\left(\sqrt[3]{8x^3+27}\right)' = \dfrac{8x^2}{\sqrt[3]{(8x^3+27)^2}}$
18. $\left(\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{x}\right)' = \dfrac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$
19. $\left(\dfrac{5}{\sqrt[4]{x^5-32}}\right)' = \dfrac{-25x^4}{4\sqrt[4]{(x^5-32)^5}}$
20. $\left(\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^3}}\right)' = \dfrac{x^2+4x-9}{2\sqrt{x^5}}$
21. $\left(\dfrac{\mathrm{tg}\,3x}{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{6x(1+\mathrm{tg}^2\,3x)-\mathrm{tg}\,3x}{2x\sqrt{x}}$
22. $\left(\dfrac{(3x+1)^2}{\sqrt{2x-5}}\right)' = \dfrac{(3x+1)(9x-31)}{\sqrt{(2x-5)^3}}$
23. $\left((x+1)^3\sqrt{x^2+2}\right)' = \dfrac{(x+1)^2(4x^2+x+6)}{\sqrt{x^2+2}}$
24. $\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}\right)' = -\dfrac{x+1}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}$
25. $\left(\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2}\right)' = \dfrac{3x-4}{2x^3\sqrt{1-x}}$
26. $((x\sin x)^3)' = 3(x\sin x)^2\,(\sin x + x\cos x)$
27. $\left(\dfrac{(x+1)^3}{3x}\right)' = \dfrac{(2x-1)(x+1)^2}{3x^2}$

5.2 Tangentes.

1. Soit $f(x) = \sqrt{4x+1}$ Déterminer l'équation de la tangente au graphe de cette fonction en son point d'abscisse $x = 2$. Vérifier graphiquement votre résultat. sol : $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

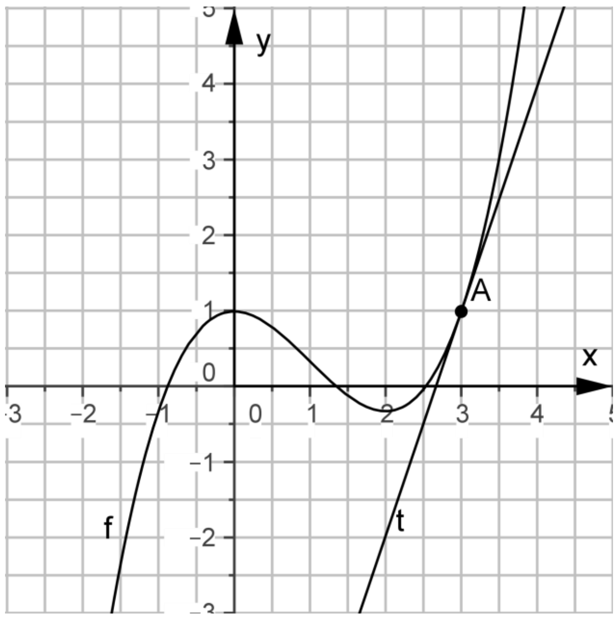
2. $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x+1}$ a) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de cette fonction en ses points d'abscisse 1 et 0.5. Vérifier votre résultat à l'aide de la calculatrice
b) Déterminer l'équation de la tangente à ce graphe ayant une pente égale à -2
sol : a) $y = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$ et $y = -\frac{x}{3} - \frac{1}{3}$ b) $t_1 \equiv y = -2x$ et $y = -2x - 12$

3. $f(x) = \dfrac{2x+3}{2x-1}$ a) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de cette fonction en son point d'abscisse – 1

b) Déterminer l'équation de la tangente à ce graphe ayant une pente égale à – 2

sol : a) $y = -\frac{8}{9}x - \frac{11}{9}$ b) $t_1 \equiv y + 2x - 6 = 0$ et $t_2 \equiv y + 2x + 2 = 0$

5.3 Exercices généraux



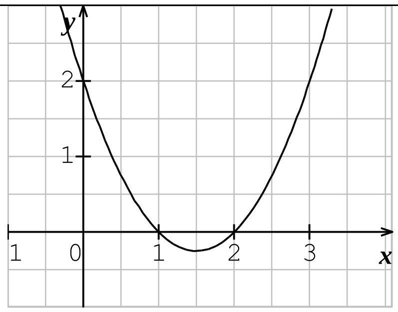
1. Démontrer que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire.
2. Démontrer que la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.
3. Dans le graphique ci-contre, la droite t est la tangente au graphe de f en son point A d'abscisse 3.
   a) A partir de ce graphique, évaluer la valeur de la dérivée de la fonction f en x =3.
   b) Déterminer l'équation cette tangente t
4. Calculer la dérivée d'ordre p de la fonction f : A $\to$ R sachant que :

   a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 + 1$ b) $f(x) = x^n$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

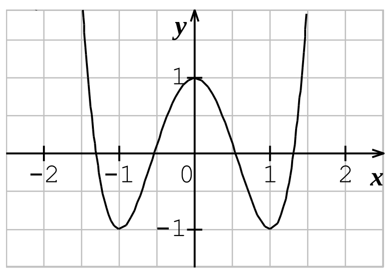
   d) $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ f) $f(x) = \sqrt{1-x}$
5. Soit $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - x^2 + 6x - 15$

   Calculer : $g(x) = f(0) + \dfrac{x}{1!} f'(0) + \dfrac{x^2}{2!} f''(0) + \dfrac{x^3}{3!} f'''(0) + \dfrac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + \dfrac{x^5}{5!} f^{(5)}(0) + \ldots$

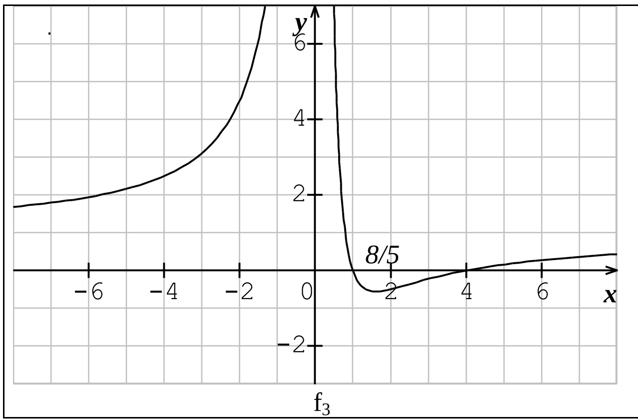
6. Déterminer les racines et étudier le signe des fonctions dérivées des fonctions suivantes.
   En déduire un graphe approximatif de ces fonctions dérivées.



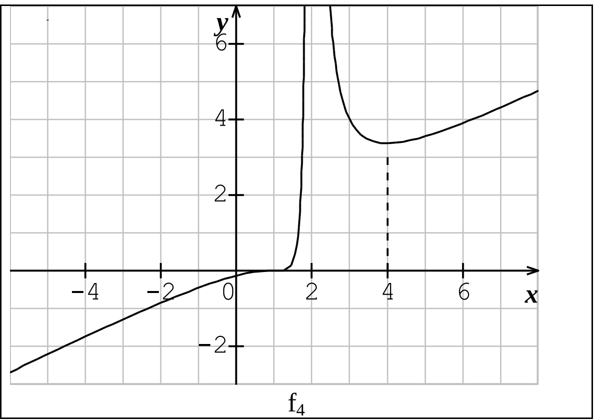
f_1



f_2



f₃



f_4

6. Résumé des formules de dérivation.

6.1 Fonctions de base.

$x' = 1$ $\qquad$ $k' = 0$

6.2 Dérivées et opérations algébriques.

$(k\, f(x))' = kf'(x)$

$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$ $\qquad$ et $f(x) \neq 0$

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$ $\qquad$ et $g(x) \neq 0$

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad x > 0$ $\qquad\qquad$ $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ $\quad f(x) > 0$

$(x^n)' = n\, x^{n-1}$ $\quad n \in R_0$ $\quad x \neq 0$ $\qquad\qquad$ $(f^n)'(x) = n\,(f(x))^{n-1} f'(x)$ $\quad n \in R_0$ $\quad f(x) \neq 0$

6.3 Dérivées et composition.

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$

6.4 Dérivées des fonctions trigonométriques.

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad\qquad$ $(\sin f(x))' = f'(x).\cos f(x)$

$(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad\qquad$ $(\cos f(x))' = -f'(x).\sin f(x)$

$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad\qquad$ $(\operatorname{tg} f(x))' = f'(x).(1 + \operatorname{tg}^2 f(x)) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$

$(\operatorname{cotg} x)' = -1 - \operatorname{cotg}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $\qquad\qquad$ $(\operatorname{cotg} f(x))' = -f'(x).(1 + \operatorname{cotg}^2 f(x)) = -\frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$