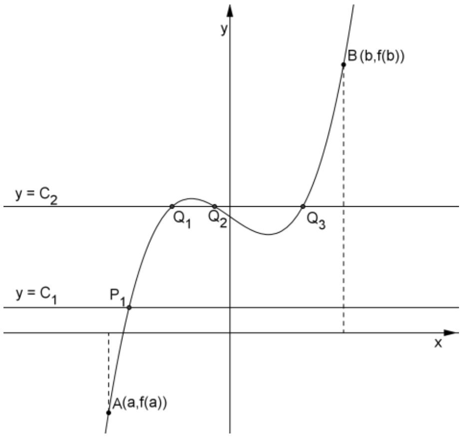
VII. Etudes de fonctions : quelques compléments.

1.1 Théorème des valeurs intermédiaires



Si f : R → R : x → f(x), fonction continue dans [a, b]
Soient A et B, 2 points du graphe de f d'abscisses respectives a et b
On observe que toute parallèle à l'axe des abscisses dont l'ordonnée est comprise entre f(a) et f(b) (d'équation : y = c avec c compris entre f(a) et f(b)) coupe l'arc AB en un point au moins.

Dans l'exemple illustré ci-contre,
la droite y = C_1 coupe le graphe de f en un point P_1
tandis que la droite y = C_2 le coupe en trois points (Q_1 , Q_2 , Q_3)

Ceci nous permet d'arriver à la formulation générale du théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f : R → R x → f(x)
Si f est continue dans [a, b] $\Rightarrow \forall$ c $\in$ [f(a), f(b)] $\exists$ r $\in$ [a,b] : f(r) = c
C-à-d : tout réel compris entre f(a) et f(b) est l'image d'au moins un réel compris entre a et b.

<u>Cas particulier.</u>
Si on se trouve dans les conditions d'application du théorème des valeurs intermédiaire avec a et b de signe contraire, nous pouvons affirmer qu'il existe au moins une racine de la fonction f dans l'intervalle [a, b]
Du point de vue graphique, cela se traduit par : si f continue sur l'intervalle [a, b] et f(a) et f(b) de signes contraires alors le graphe de f coupe l'axe des abscisses en au moins un point.
Le graphique ci-dessus illustre également cette situation.

2. Résolution d'une équation f(x) = 0 par approximations successives

2.1 Résolution d'une équation f(x) = 0 par dichotomie

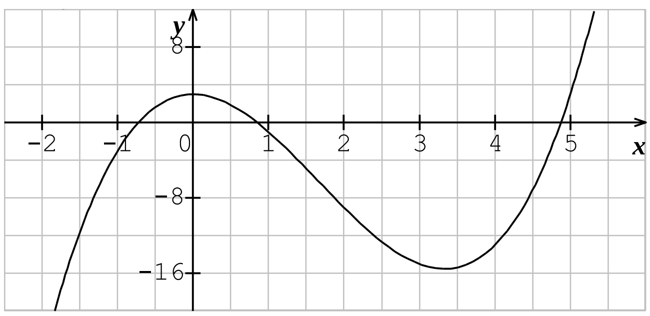
Exemple : soit la fonction polynôme f(x) = x^3 - $5x^2$ + 3
Une rapide étude de cette fonction nous donne les résultats suivants :
dom f = R f(0) = 3 Racines : f(1), f(-1), f(3) et f(-3) sont tous différents de 0. Le tableau de Horner ne nous permet donc pas ici de déterminer les racines. Nous allons laisser ce point en suspens pour l'instant.
f ' (x) = $3x^2$ - 10 x racines : x = 0 et x = 10/3
f " (x) = 6x - 10 racine : x = 5/3

		0		5/3		10/3	
f '	+	0	-	-	-	0	+
f "	-	-	-	0	+	+	+
	↗	max	↘	↘	↘	min	↗
	∩	∩	∩	P.I.	∪	∪	∪

Quelques valeurs et le graphique :

x	f(x)
5/3	-169/27
10/3	-15.5

N.B. : les unités sont différentes selon les axes.



<u>Observation</u> : le théorème des valeurs intermédiaire (et l'ébauche du graphique) nous permet d'affirmer l'existence de 3 racines situées respectivement entre -1 et 0, entre 0 et 1 et enfin une racine supérieure à 3

Mais comment déterminer ces racines plus précisément ?
Attachons-nous à la recherche de la première racine.

Nous avons :

x	- 1	0
f(x)	- 3	3

A ce stade, on peut dire que la racine est déterminée à l'unité près.

Nous allons maintenant augmenter la précision en calculant des valeurs intermédiaires.

x	-1	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	0
f(x)	-3	-0.712	0.207	0.98	1.625	3

$\Rightarrow$ la racine $\in$]- 0.8; - 0.7[

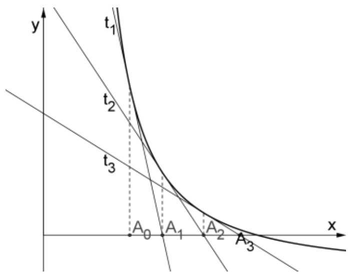
Pour obtenir une approximation à 0,01 près, on recommence le même procédé.

X	-0.8	-0.75	-0.73	-0.72	-0.7
f(x)	-0.712	-0.234	-0.05	0.03	0.207

<u>*Exercices.*</u>
Déterminer les deux autres racines de ce polynôme à 0.01 près
(solutions $x_2 \in$]0.85; 0.86[et $x_3 \in$]4.87; 4,88[ )

2.2 Résolution par la méthode de Newton

2.2.1 Principe de la méthode



On recherche une valeur approchée de la solution de l'équation f(x) = 0
Soit $a_{0,}$ une première valeur approchée de celle-ci. A partir de cette valeur, nous allons en calculer une autre plus proche de la solution réelle. Graphiquement, nous voyons qu'il s'agit de $a_{1,}$ point d'intersection avec l'axe des x de la tangente à la courbe au point (a_0, f(a_0)) (t_1)
Pour cela, nous recherchons l'équation de $t_1 \ni (a_0, f(a_0))$ et de pente f ' (a_0)
$t_1 \equiv y - f(a_0) = f'(a_0)\,(x - a_0)$
Pour déterminer le point d'intersection de cette droite avec l'axe des x, il suffit d'annuler y dans cette équation.

$\Rightarrow x - a_0 = -\dfrac{f(a_0)}{f'(a_0)} \Rightarrow x = a_0 - \dfrac{f(a_0)}{f'(a_0)} = a_1$, la nouvelle valeur approchée de la solution

Il suffit alors de reprendre le procédé avec cette nouvelle valeur pour obtenir : $a_2 = a_1 - \dfrac{f(a_1)}{f'(a_1)}$

2.2.2 Exemple

Reprenons l'exemple traité plus haut par la dichotomie.
$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3$ $\qquad$ $f'(x) = 3x^2 - 10x$

$a_0 = -1$ $\qquad$ $a_1 = -1 - \dfrac{f(-1)}{f'(-1)} = -1 - \dfrac{-3}{13} = -0{,}769$

De même, on obtient : $a_2 = -0{,}725$
Nous constatons que dès la seconde approximation, on a un aussi bon résultat que dans la première méthode.
<u>*Exercice.*</u>
Calculer les 2 autres racines du polynôme $x^3 - 5x^2 + 3$ par la méthode de Newton.
sol : a) $a_0 = 1$ $\quad a_1 = 0{,}857$ $\quad a_2 = 0{,}850$..........
b) $a_0 = 4$ $\quad a_1 = 5{,}625$ $\quad a_2 = 5{,}036$ $\quad a_3 = 4{,}88$ $\quad a_4 = 4{,}8737$ $\quad a_5 = 4{,}8736$

2.2.3 Critère d'arrêt.

Deux sortes de critères d'arrêt peuvent être employés :
1) Obtenir n décimales exactes (la racine est alors déterminée à 0,1 près, 0,01 près ....)

2) On peut également s'arrêter lorsque f(x) < k fixé (ex : f(x) < 0,001)

2.3 Exercices

Déterminer les racines des fonctions suivantes en utilisant la dichotomie et la méthode de Newton
(critère d'arrêt : à 0,01 près / tel que f(x) < 0,001)

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ sol : $x \in]-0{,}33; -0{,}32[$ / si $a_0 = 0 \Rightarrow a_5 = -0{,}3236$ et $f(a_5) = -1{,}1$ E-10
2) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 5$ sol : $x_1 \in]0{,}22; 0{,}23[$ / si $a_0 = 0 \Rightarrow a_4 = 0{,}224366$
3) $f(x) = x^3 - 3x + 3$ sol : $x \in]-2{,}10;-2{,}11[$ /si $a_0 = -3 \Rightarrow a_5 = -2{,}10380$
4) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ sol : $x \in]-0{,}33; -0{,}32[$ / si $a_0 = 0 \Rightarrow a_4 = -0{,}323610$ et $f(a_4) = -1{,}1$ E-10

3. Points de rebroussement

<u>Définition</u> : Un point du graphe d'une fonction est un ***point de rebroussement*** ssi la dérivée à gauche de ce point n'est pas égale à la dérivée à droite et que ces deux dérivées sont infinies.

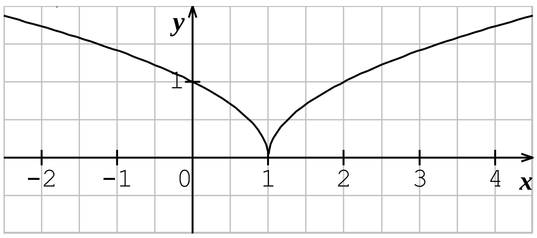
<u>Exemple 1</u>

soit $f(x) = \sqrt{|x-1|}$

$\forall x \leq 1 : f(x) = \sqrt{-x+1}$ et $\forall x \geq 1 : f(x) = \sqrt{x-1}$

$\Rightarrow \forall x < 1 : f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{-x+1}}$

et $\forall x > 1 : f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$



$$\Rightarrow f'_g(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-1}{2\sqrt{-x+1}} = -\infty \text{ et } f'_d(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = +\infty$$

Les dérivées à gauche et à droite de 1 ne sont pas égales et sont toutes deux infinies : le point (1, 0) est un point de rebroussement du graphe de f(x)

<u>Exemple 2</u>

soit $f(x) = \sqrt{|x^2-4|}$

$\forall x \in]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$ $f(x) = \sqrt{-x^2+4}$

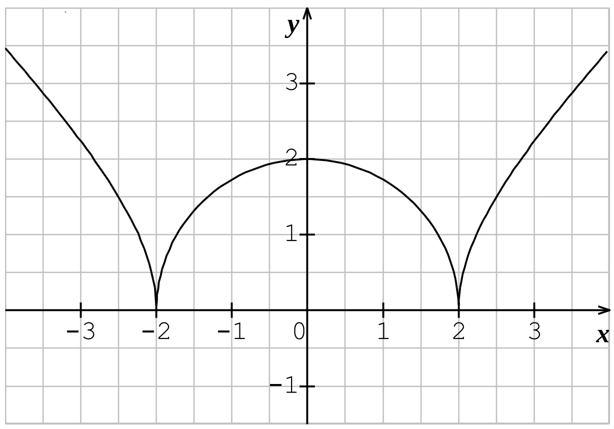
et $\forall x \in [-2, 2]$ $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

$\Rightarrow \forall x \in]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$ $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{-x^2+4}}$

et $\forall x \in [-2, 2] : f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} - 2x$

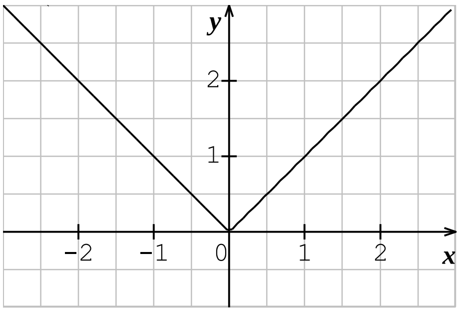
$\Rightarrow f'_g(-2) = -\infty$ et $f'_d(-2) = \infty$

Les dérivées à gauche et à droite de -2 ne sont pas égales et sont toutes deux infinies : le point (-2, 0) est un point de rebroussement du graphe de f(x)
De même que le point (2,0)



4. Points anguleux.

<u>Définition</u> : Un point du graphe d'une fonction est un ***point anguleux*** ssi la dérivée à gauche de ce point n'est pas égale à la dérivée à droite et que l'une de ces dérivées au moins n'est pas infinie.



<u>Exemple 1</u>

soit f(x) = |x|

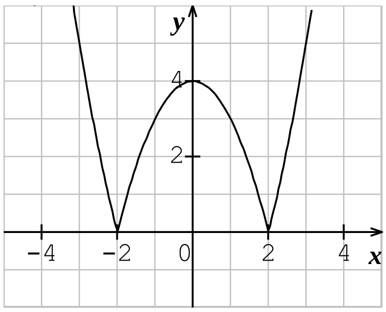
$\forall$ x $\in$ R^- f(x)= -x et $\forall$ x $\in$ R^+ f(x) = x

$\Rightarrow$ $\forall$ x $\in$ R^- : f '(x)= -1 et $\forall$ x $\in$ R^+ : f '(x) = 1

$\Rightarrow$ $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$

Les dérivées à gauche et à droite de 0 ne sont pas égales et l'une d'entre elles au moins n'est pas infinie : le point (0, 0) est un point anguleux du graphe de f(x)

Comme nous l'avons précisé précédemment, la fonction f(x) = |x| est continue mais n'est pas dérivable en x = 0



<u>Exemple 2</u>

soit f(x) = $|x^2 - 4|$

$\forall$ x $\in$]- ∞, -2] ∪ [2, ∞ [f(x)= $x^2 - 4$

et $\forall$ x $\in$ [-2, 2] f(x) = - x^2 + 4

$\Rightarrow$ $\forall$ x $\in$]- ∞, -2] ∪ [2, ∞ [f '(x)= 2x

et $\forall$ x $\in$ [-2, 2] f '(x) = - 2x

$\Rightarrow$ $f'_g(-2) = -4$ et $f'_d(-2) = 4$

Les dérivées à gauche et à droite de -2 ne sont pas égales et l'une d'entre elles au moins n'est pas infinie : le point (-2, 0) est un point anguleux du graphe de f(x)

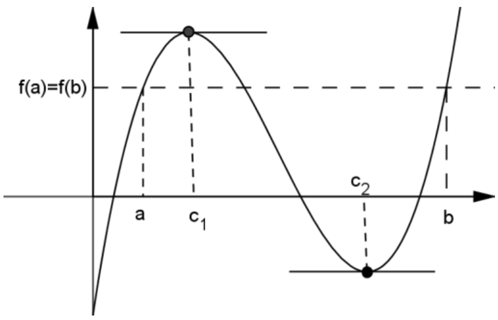
De même : $f'_g(2) = -4$ et f 'd (2) = 4 : le point (2, 0) est également un point anguleux du graphe de f

Comme dans l'exemple 1, cette fonction est continue mais non dérivable en x = -2 et en x = 2

5. Théorème de Rolle

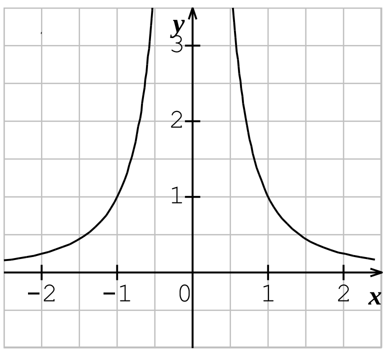
> Soit f : R → R : x → f(x) continue sur l'intervalle [a, b] et dérivable sur]a, b[et telle que f(a) = f(b)
> $\Rightarrow$ $\exists$ c $\in$]a, b[: f '(c) = 0

Nous ne démontrerons pas ce théorème, mais nous pouvons aisément le vérifier graphiquement : en effet, le graphe ci-contre nous montre qu'il existe au moins un point c $\in$]a, b[où la tangente au graphe de f est horizontale c. à d où f' (c) = 0



Les 2 exemples suivants prouvent la nécessité des hypothèses.

<u>Exemple 1</u> : si f(x) = $\dfrac{1}{x^2}$



Nous avons f(-2) = f(2) et pourtant, $\forall$ x $\in$]-2, 2[f'(x) ≠ 0

Dans ce cas, la fonction f(x) n'est pas continue au point 0 : le théorème de Rolle n'est pas applicable.

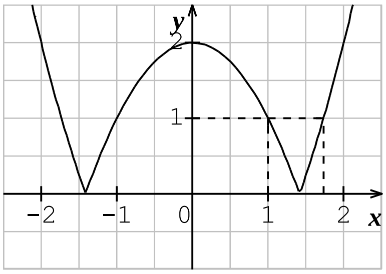
Exemple 2 : si $f(x) = |x^2 - 2|$

Nous avons $f(1) = f\left(\sqrt{3}\right) = 1$

et pourtant, $\forall\ x \in\ ]1, \sqrt{3}[$, $f'(x) \neq 0$

Dans ce cas, f est continue sur $[1, \sqrt{3}]$, mais n'est pas dérivable sur $]1, \sqrt{3}[$

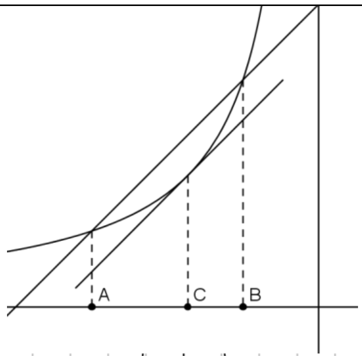
Au point $\sqrt{2}$, f n'est pas dérivable.



6. Théorème de Lagrange (ou théorème des accroissements finis)

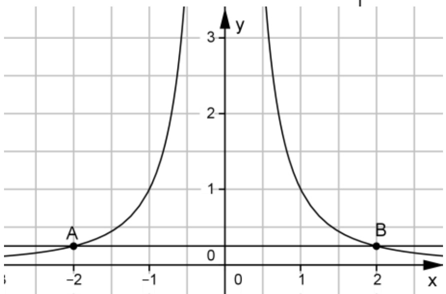
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ $a \neq b$ $\Rightarrow \exists\ c \in\ ]a, b[: f(b) - f(a) = (b - a) . f'(c)$

Le théorème de Lagrange est une généralisation du théorème de Rolle. Il exprime que pour une fonction continue sur un intervalle [a, b] et dérivable sur]a,b[il existe un point c de l'intervalle]a,b[où le coefficient angulaire de la tangente au graphe (c. à d. f ' (c)) est égal au coefficient angulaire de la sécante joignant les points (a, f(a) et (b, f(b).
Le graphe ci-contre illustre la propriété

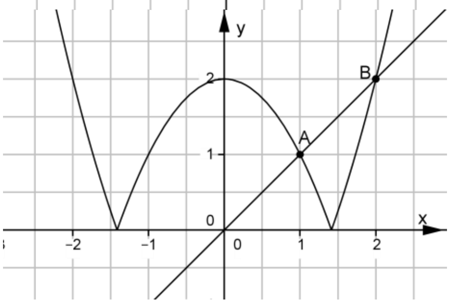


Comme dans le cas du théorème de Rolle, les hypothèses sont indispensables et nous allons reprendre les exemples précédents pour le justifier.

Reprenons le premier exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (fonction qui n'est pas continue sur [-3, 2]). Nous constatons qu'il n'existe pas de point $c \in\ ]-2, 2[$ tel que $f(2) - f(-2) = (2 + 2) . f'(c)$ (pas de tangente de pente nulle entre –2 et 2)



De même si $f(x) = |x^2 - 2|$ (fonction non dérivable sur l'intervalle]1, 2[)
Nous constatons qu'il n'existe pas de point $c \in\ ]1, 2[$ tel que $f(2) - f(1) = (2 - 1) f'(c) \Leftrightarrow$ pas de tangente de pente égale à 1 dans l'intervalle]1, 2[



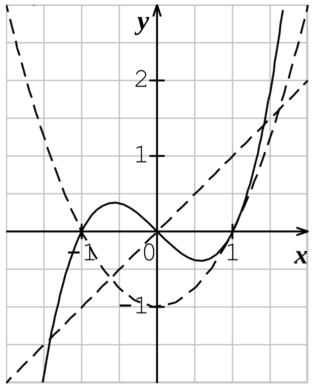
7. Graphes déduits.

7.1 Le produit de 2 fonctions = h(x) = f(x) . g(x)

Le graphe d'une fonction, produit de deux autres peut être obtenu à partir des graphes des fonctions initiales en respectant quelques règles simples.

1. Si $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$ alors $h(x) = 0$
   les racines de chaque facteur sont des racines du produit.
2. Si $f(x) = 1$ alors $h(x) = g(x)$ et de même si $g(x) = 1$ alors $h(x) = f(x)$
   si l'une des fonctions du produit vaut 1, alors le produit vaut l'autre fonction.

3. Si f(x) = - 1 alors h(x) = - g(x) et de même si g(x) = -1 alors h(x) = -f(x)
si l'une des fonctions du produit vaut -1, alors le produit vaut l'opposé de l'autre fonction.
4. Si |f(x)| > 1 et |g(x)| > 1 alors |h(x)| > max (|f(x)|, |g(x)|)
5. Si |f(x)| < 1 et |g(x)| < 1 alors |h(x)| < min (|f(x)|, |g(x)|)



Exemple : Le graphe ci-contre représente la situation où f(x) = $x^2 - 1$ et g(x) = x
Les fonctions f(x) et g(x) sont tracées en pointillés tandis que la fonction h(x) est en trait plein.
N.B. : il est parfois utile de tracer le graphe de l'opposé d'une des fonctions.

Applications :
En appliquant les principes énoncés ci-dessus, tracer les graphes des fonctions suivantes :
a) f(x) = $- x^4 + x^2$ b) f(x) = $x^3 - x^2$ c) f(x) = x (x - 1) (x – 2)

7.2 L'inverse d'une fonction : g(x)=: $\frac{1}{f(x)}$

1. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ alors $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

2. De même si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ alors $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty$

   Les points 1 et 2 se traduisent en quelque sorte par une inversion entre « racines » et « asymptotes verticales »

3. Si f(x) = ± 1 alors, $\frac{1}{f(x)} = \pm 1$

4. f(x) et $\frac{1}{f(x)}$ sont de même signe.

5. Si f(x) est croissante, alors $\frac{1}{f(x)}$ est décroissante et inversement.

   Justification : $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$ et $\left(\frac{1}{f}\right)'(x)$ est donc du signe contraire de celui de f ' (x)

   En conséquence : les maximums et les minimums sont inversés.

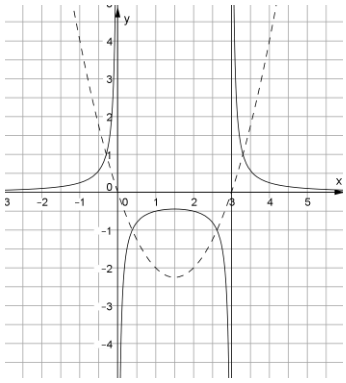
6. Si la droite y = b (b ≠ 0) est asymptote horizontale du graphe de f(x) alors la droite y = $\frac{1}{b}$ est asymptote horizontale du graphe de $\frac{1}{f}$

   Justification : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}$ (et de même en -∞)

7. Si la fonction f(x) admet une asymptote oblique en ± ∞ alors la fonction $\frac{1}{f(x)}$ admet l'axe ox comme asymptote horizontale en ± ∞

   Justification : dans ce cas : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et donc $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$

N.B. : Si f(x) admet une AH y = 0 en ± ∞ alors, on ne peut rien conclure :
$\frac{1}{f(x)}$ peut admettre une asymptote oblique ou ne pas avoir d'asymptote en ± ∞



Exemple :
Le graphe ci-contre illustre le cas où f(x) = x^2- 3x.
La fonction f(x) est en tirets et la fonction g(x) en trait plein.
Applications :

En appliquant les principes énoncés ci-dessus, tracer les graphes des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ $\qquad$ $f_2(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$ $\qquad$ $f_3(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$ (inverse de l'exercice du point 1.4)

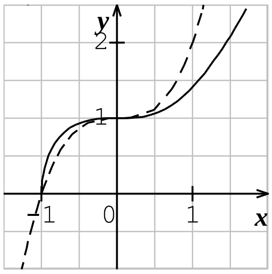
$f_4\,(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ $\qquad$ $f_5\,(x) = \dfrac{1}{\tan x}$ $\qquad$ $f_4(x) = \dfrac{1}{-2 + \sqrt{2 - x}}$

7.3 La racine carrée d'une fonction : g(x) = $\sqrt{f(x)}$

Si $g(x) = \sqrt{f(x)}$

1. Le domaine de g(x) est la restriction du domaine de f à l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f(x) est positive.
2. Les fonctions f et g ont les mêmes racines.
3. Si f(x) vaut 1 alors g(x) vaut également 1.
4. Si f(x) est croissante (ou décroissante) alors, g(x) est également croissante (ou décroissante) et les abscisses des extrémums de ces fonctions sont identiques.

   <u>justification</u> : comme $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$, les signes de g' (x) et de f ' (x) et leurs racines sont identiques.



<u>Exemple</u> : soit $f(x) = x^3 + 1$
La fonction f(x) est en pointillé et la fonction g(x) en trait plein.

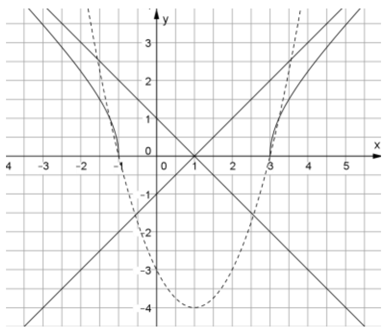
<u>Applications</u> : $f_1\,(x) = \sqrt{2x + 1}$ $\qquad$ $f_2(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

8. Racine carrée d'une fonction du second degré.

8.1 Exemple

Soit la fonction : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$
En utilisant les observations du point 3.3, nous obtenons aisément le domaine et le tableau de variation de cette fonction à partir de la fonction du second degré : $g(x) = x^2 - 2x - 3$ (racines : -1 et 3)

		-1		3	
f'	-	$\vert$	$\vert$	$\vert$	+
f	↘	0	$\vert$	0	↗

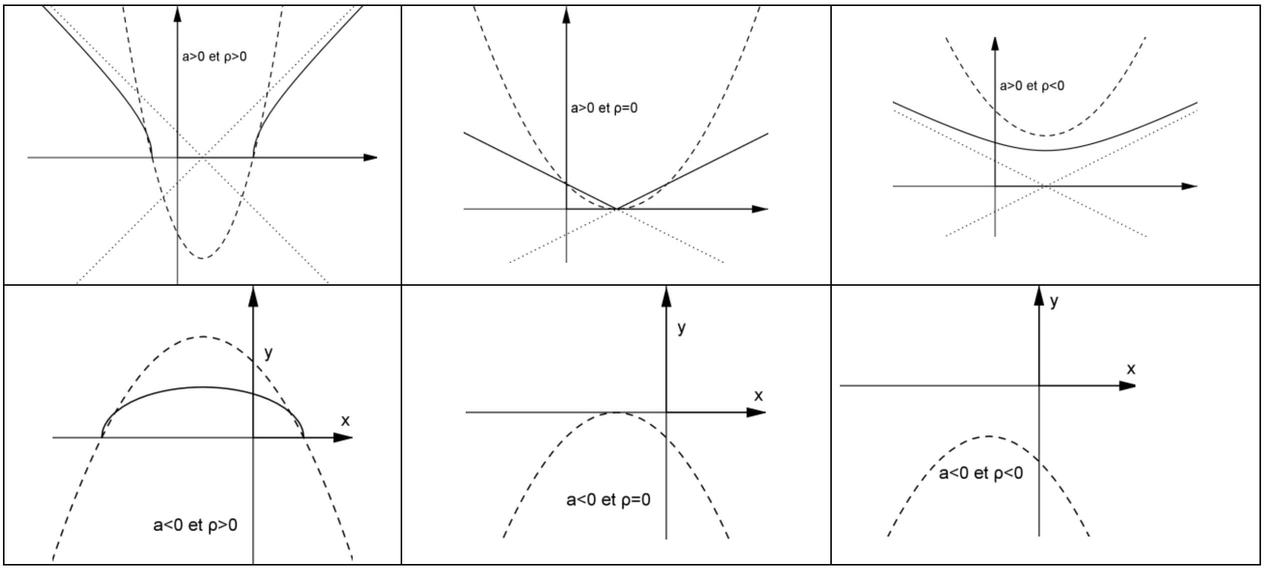


Il reste donc à rechercher les éventuelles asymptotes de cette fonction.

Le calcul nous permet de vérifier que la fonction admet une asymptote oblique en $+\infty$: y = x -1 et une asymptote oblique en $-\infty$: y = - x + 1
Et nous obtenons ainsi le graphique ci-contre (où les asymptotes et la fonction g(x) ont également été représentées).

8.2 Généralisation :

Déterminons le graphe de la racine carrée d'une fonction du second degré à partir du graphe de celle-ci.
Remarquons que lorsque a < 0, le domaine est réduit à l'intervalle entre les racines ou à l'unique racine ou égal à l'ensemble vide selon que ρ est positif, nul ou négatif. Nous obtenons alors le tableau suivant :



A partir des observations précédentes, nous pouvons aisément établir le graphe de la racine carrée d'une fonction du second degré. Le seul problème qui subsiste est la détermination des asymptotes si nécessaire.

Cette recherche n'a de sens que lorsque $a \geq 0$ (sinon la fonction $\sqrt{ax^2+bx+c}$ n'existe pas en $\pm\infty$)

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{ax^2}}{x} = \pm\sqrt{a}$$

En $+\infty$ $p = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}x\right)\left(\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2+bx+c-ax^2}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{bx}{\sqrt{ax^2}+\sqrt{a}x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{bx}{2\sqrt{a}x} = \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

En $-\infty$; par un calcul similaire, on trouve $p = \frac{-b}{2\sqrt{a}}$

La fonction $\sqrt{ax^2+bx+c}$ admet pour asymptote oblique la droite $d_1 \equiv y = \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$ en $+\infty$

et la droite $d_2 \equiv y = -\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}$ en $-\infty$

<u>Remarque</u> : on obtient les mêmes résultats à partir des observations suivantes :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{ax^2+bx+c} = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)} = \sqrt{a}\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$= \sqrt{a}\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\left(1-\frac{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\right)} = \sqrt{a}\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\left(1-\frac{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left|x+\frac{b}{2a}\right| . 1 = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$$

8.3 Applications

Etudier les fonctions suivantes et tracer leurs graphes en tenant compte des conclusions précédentes :

1. $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$
2. $f(x) = \sqrt{4x^2-6x}$
3. $f(x) = \sqrt{9x^2+4}$