XIII. Un devoir par chapitre…

1. Enoncés

1.1 Généralités sur les fonctions.

1. Simplifier si possible :

   a) $\dfrac{x^2-8x+12}{-16x^2+42x-20}$ b) $\dfrac{6x^3-5x^2-12x-4}{3x^3+5x^2-16x-12}$

2. Déterminer m et p pour que les points A(1,-2) et B(2,1) appartiennent à la parabole $P \equiv y = 3x^2 + 2mx + p$
3. Déterminer m et p pour que la parabole $P \equiv y = -3x^2 + 5mx + p$ ait pour sommet le point (5,-3)
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite d et de la parabole P

   a) si $d \equiv y = -3x$ et $P \equiv y = 4 - x^2$

   b) si $d \ni A(1, -2)$ et $B(2, 3)$ et $P \equiv y = x^2 + mx + p$ admet la droite $x = -1$ comme axe de symétrie et comprend le point (0,0)

5. Déterminer les domaines des fonctions suivantes :

   a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3+5x}{2x^2+5x-3}}$ b) $f(x) = \sqrt{3-5x} - \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

   c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-2x^2-1}}{1-\sqrt{2x-1}}$ d) $f(x) = \sqrt{x^2-5} - \sqrt{1-2x}$

   e) $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{-x}}{\sqrt{-2x-1}+x}$

6. Un producteur de pommes veut faire procéder à la cueillette de sa récolte par une équipe qui ne peut travailler qu'une seule journée. Au bout du mois de septembre, le prix est de 50 €. la tonne, mais ce prix diminue de 0.5 €. par jour. A quel moment doit-il vendre, sachant que sa production augmente de une tonne par jour et qu'il estime la production initiale à a) 60 t ? b) 80 t ? c) 100 t ? d) 120 t ?
7. On doit construire un réservoir parallélépipédique de base carrée fermé par un couvercle. Sa capacité est de 100 m^3. Si le fond coûte 2 € le m^2, le couvercle 3,5 €. le m^2et les faces latérales 1 €. le m^2 quelles sont les dimensions à donner à ce coffre pour que le coût des matériaux nécessaires à sa réalisation soit minimum ? Quel est ce coût ?
8. Le tableau ci-dessous nous donne les valeurs des fonctions f et g aux points x choisis. Vérifier et justifier si les fonctions f(x) et g(x) sont des fonctions du premier ou du second degré. Déterminer ensuite la forme analytique de ces fonctions.

x	f(x)	g(x)
3	5,7	65,078
5	7,9	126,502
6	9	165,2
7	10,1	209,222
8	11,2	258,568
9	12,3	313,238
10	13,4	373,232

1.2 Fonctions particulières – Fonctions déduites..

1. Tracer le graphe des fonctions suivantes en les déduisant de fonctions de référence et préciser les différentes transformations :

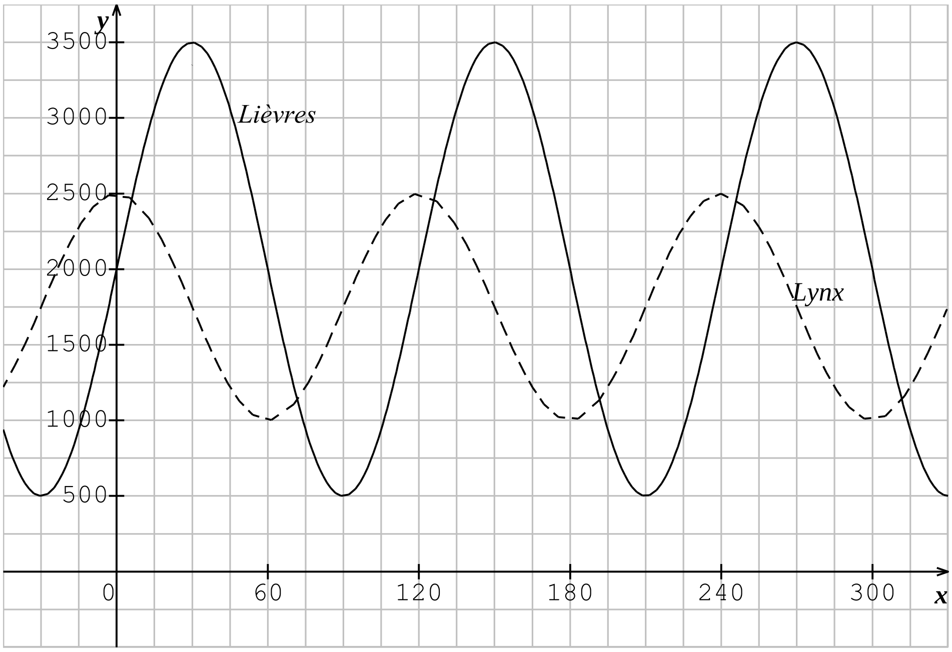
   a) $f(x) = 1 + 2\cos(\frac{\pi}{4} - x)$ b) $f(x) = 3 + 2\sqrt{2x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{3-2x^2}{x^2}$

d) $f(x) = 2 + E\left(\frac{x}{2} - 3\right)$

e) $f(x) = 2\,|2x - 1| - 3$

2. Déterminez deux fonctions de la forme $y = a \sin k(t - b) + c$ qui modélisent les populations de lynx et de lièvres représentées graphiquement à la figure ci-dessous.



3. Esquisser un graphe d'une fonction paire définie sur l'intervalle [-2, 2], admettant un maximum en (0, -1) , décroissante sur l'intervalle [-2, -1] et décroissante sur [0, 1]

1.3 Progressions arithmétiques et géométriques.

1. Quel est le 1 995$^{\text{ème}}$ terme de la suite définie par $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$

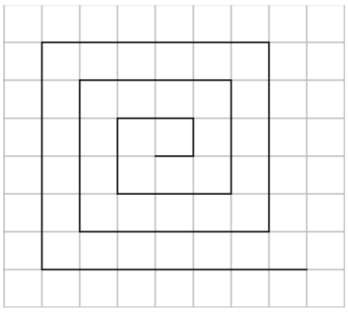
   A l'aide du calcul des premiers termes, conjecturer une formule explicite pour u_n
   Démontrer ensuite que cette formule est vérifiée pour toute valeur de n en utilisant la méthode de démonstration par récurrence.

2. Une PA comporte les termes $\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{15}{2}, \frac{21}{2}, \ldots$

   Déterminer 5 termes consécutifs de cette PA dont la somme vaut 187,5

3. Le premier terme d'une P.G. est $\sqrt{2}$ et le 4$^{\text{ème}}$ est $3\sqrt{6}$. Calculer la raison, le 10$^{\text{ème}}$ terme et la somme des dix premiers termes de cette PG

4. Calculer la longueur de la ligne polygonale dessinée ci-contre et prolongée jusqu'au 123$^{\text{ème}}$ côté (un carré mesure 1 cm)



5. Les prévisions de Malthus (1755-1834)
   En 1800, l'Angleterre comptait 8 millions d'habitants. Malthus avait émis l'hypothèse suivante:
   − la population de l'Angleterre suit une progression géométrique en augmentant de 2 % par an;
   − l'agriculture anglaise en 1800 permet de nourrir 10 millions d'habitants et son amélioration permet de nourrir 500000 habitants supplémentaires par an, suivant une progression arithmétique.
   Calculer, selon l'hypothèse de Malthus, la population de l'Angleterre en 1900 et le nombre de personnes que pouvait nourrir l'agriculture anglaise en 1900.

Déterminer à partir de quelle année l'agriculture anglaise ne permet plus de nourrir la population anglaise, toujours selon l'hypothèse de Malthus.

1.4 Limites – Asymptotes.

1. Calculer les limites en a des fonctions

a) $f_1(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{-x^2 + 2x + 3}$ a = -1 , a = 3, a = ± ∞

b) $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{3x^4 - x^2 + 7}{2x^2 - 5}}$ a = ± ∞

c) $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{9 + x^2} - \sqrt{5x + 5}}{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x^2 - 7}}$ a = 4

d) $f_4(x) = \sqrt{3x^2 - 2x + 1} - \sqrt{3x^2 + 2}$ a = ± ∞

e) $f_5(x) = \sqrt{3x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 2}$ a = ± ∞

2. Déterminer les domaines des fonctions suivantes et rechercher leurs éventuelles asymptotes :

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 3}$

d) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 4}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x - 3}$

1.5 Dérivées.

1. Calculer les dérivées suivantes :

a) $f(x) = 7x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 5x + 2$

b) $f(x) = 4\,(1-5x)^3$

c) $f(x) = (3x - 1)^4\,(2 - x^2)^3$

d) $f(x) = \sqrt[3]{(1 - x^2)^2}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x - 3}}$

f) $f(x) = \dfrac{7x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 4x}$

g) $f(x) = \left(\dfrac{x}{1 + x}\right)^5$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

i) $f(x) = \dfrac{(3x - 2)^2}{(1 - 2x)^3}$

j) $f(x) = \dfrac{3x + 2}{\sqrt{2x - 2}}$

k) $f(x) = (1 - 2x)\,\sqrt{3x - 2}$

l) $f(x) = \dfrac{3x}{2\sqrt{x^2 - 4}}$

m) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^3}}$

n) $f(x) = 4 \sin^2 x \cos x$

o) $f(x) = \sin \sqrt{3x + 1}$

p) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 2x}$

q) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}}$

r) $f(x) = 5 \sin^4 (3x^2 - 2)$

2. Recherche de tangentes : soit $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 1}$

a) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de cette fonction en son point d'abscisse – 1

b) Déterminer l'équation de la tangente à ce graphe ayant une pente égale à 4

c) Vérifier graphiquement le résultat obtenu à l'aide de la calculatrice ou du logiciel géogébra.

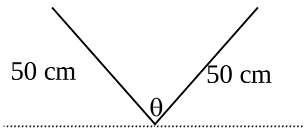
1.6 Etudes de fonctions.

1. Etudier la fonction suivante et tracer son graphe de la façon la plus efficace possible : $f(x) = \dfrac{3x-6}{2x+1}$
2. Etudier les fonctions suivantes et tracer leurs graphiques (y compris l'étude de f")

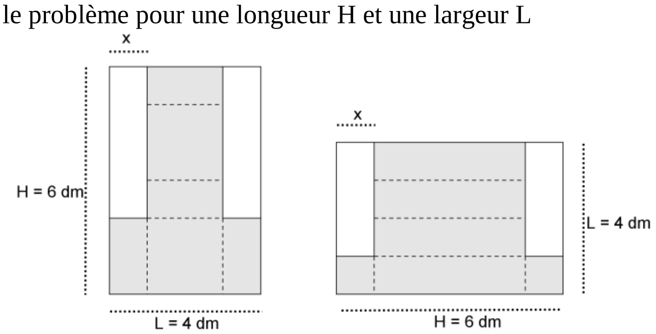
   a) $f_1(x) = \dfrac{-3x^2+x-2}{1+x}$ b) $f_2(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ c) $f_3(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^3}$
3. Déterminer les équations
   a) de la tangente à la courbe $y = f_1(x)$ en son point d'abscisse 2
   b) de la (des) tangentes à cette courbe dont la pente vaut $-\dfrac{3}{2}$

1.7 Applications de la dérivée. – Modélisation.

1. On désire construire un récipient ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de base carrée et ayant une capacité de 500 litres. Sachant que le matériau utilisé pour la fabrication du couvercle est deux fois plus coûteux que celui qui entre dans la fabrication du fond et des parois latérales, quelles doivent être les dimensions du récipient pour que le coût soit minimal ?
2. Quel est le point de la courbe d'équation $y = x^2 + 1$ le plus proche du point (0,4) ?
3. On construit un réservoir en pliant une feuille de zinc de 1m de large en deux et en fermant les deux extrémités (cfr. schéma ci-contre). Quelle doit être la valeur de l'angle θ pour que la capacité du réservoir soit maximale ?



4. Dans un carton de 6 dm de long sur 4 dm de large, on découpe 2 bandes le long d'une partie de la longueur de la feuille (comme le montre le schéma ci-dessous). Ensuite, on plie le carton (comme l'indiquent les pointillés) afin de former un parallélépipède rectangle.
   a) Exprimer le lien entre la longueur de la bande à découper et sa largeur x
   b) Déterminer la largeur de la bande à découper pour que le volume de la boîte soit maximum.
   c) Le résultat obtenu est-il le même si on découpe la bande le long de la largeur de la feuille ?
   d) Reprendre le problème pour une longueur H et une largeur L



5. Un corps se déplace sur une ligne horizontale selon la loi $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$
   Les distances sont exprimées en m et les temps en secondes.
   a) Déterminer sa vitesse et son accélération en fonction de t.
   b) Quand la vitesse atteint-elle un extremum ? Quel est-il ?
   c) Calculer l'espace parcouru durant les 5 premières secondes.

1.8 Trigonométrie.

1. Sans faire usage de la calculatrice, calculer la valeur de

   a) sin (a - b) sachant que cos a = - 8/17 ; sin b = 4/5 et $\dfrac{\pi}{2} < a,b < \pi$

   b) sin 2a sachant que sin a = - 3/17 et $\dfrac{3\pi}{2} < a < 2\pi$
2. Calculer l'expression suivante (sans faire usage de la calculatrice)

   $\cos a + \cos\left(a + \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos\left(a - \dfrac{2\pi}{3}\right)$

3. Vérifier les identités suivantes :
   a) $\frac{\sin(a-b)+\cos(a+b)}{\sin(a+b)+\cos(a-b)} = \frac{1-\tan b}{1+\tan b}$ b) $\tan^2 a - \tan^2 b = \frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b}$
   c) cot a - tan a = 2 cot 2a   d) sin 4a cos a - sin 3a cos 2a = sin a cos 2a
4. Simplifier si possible : a) $\frac{\cos 2a - \cos 4a}{\cos 2a + \cos 4a}$ b) $\frac{\cos a + \cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a}$
5. Résoudre les équations suivantes et préciser leurs solutions principales
   a) $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = -\cos x$ b) sin x - sin 2x + sin 3x - sin 4x = 0
   c) $\tan^2 x - \sqrt{3}\tan x = 0$ d) 2 cos 2x + 3 = 4 cos x
   e) $\sin x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ f) $\cos x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{2} = 0$
   g) 2 cos x + 3 sin x + 3 = 0   h) $\sin^3 x + 3\sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x = 0$
   i) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$
6. Résoudre les inéquations suivantes :
   a) $\sin\frac{x}{3} > \sin\frac{\pi}{4}$ b) $\tan(2x + \frac{\pi}{4}) \geq -\tan\frac{\pi}{3}$
   c) $|\cos 2x| < \sin\frac{\pi}{3}$

1.9 Matrices – déterminants – systèmes d'équations.

1. Calculer : $\left[\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^t + (3 \;\; -1 \;\; 2) . \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
2. Résoudre le système suivant
   a) par la méthode de la recherche de la matrice inverse
   b) par la méthode des déterminants
   c) par triangularisation
   $\begin{cases} 3x - y - z = 14 \\ 4x + y - z = 12 \\ 2x + y - 3z = 10 \end{cases}$
3. Résoudre les systèmes suivants par la méthode de triangulation
   a) $\begin{cases} x - 3y + z = -4 \\ x - y + z = 2 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + z = 1 \\ -2x + y + 4z = -2 \\ -x - y - z = -1 \end{cases}$
4. Résoudre le système suivant et discuter l'ensemble des solutions selon la valeur du paramètre m :
   $$\begin{cases} (m+2)x + 3y - 3z = 0 \\ x + (m+1)y - z = 1 \\ 2x + 3y + (m-3)z = 0 \end{cases}$$
5. Trouver les dimensions d'un colis qui a la forme d'un parallélépipède rectangle sachant que 3 rubans l'entourent en passant par les milieux des côtés des deux faces opposées et se terminent chacun par un nœud nécessitant 20cm. Les rubans mesurent respectivement 240 cm, 260 cm, et 280 cm.

1.10 Géométrie dans l'espace.

1. Les triangles SAB et S'AB sont isocèles et non coplanaires et les sommets principaux sont S et S'.
   Si M désigne le milieu de [AB], démontrer que le plan déterminé par S, S' et M est perpendiculaire à la droite AB. (graphique, hypothèse, thèse, démonstration)
2. Dans un tétraèdre ABCD, la hauteur du Δ ABC comprenant A et la hauteur du Δ BCD comprenant D sont sécantes. Démontrer que les arêtes AD et BC sont orthogonales.
3. Si deux droites sont orthogonales, tous les points de l'une ont la même projection orthogonale sur l'autre. Démontrer.

4. Soit le carré ABCD de côté de mesure a dans le plan α. Par A, on mène la droite $m \perp \alpha$. Soit $M \in m$, tel que $|AM| = a$. Soit la pyramide de base carrée MABCD.
   a) Calculer la longueur de ses arêtes et le volume de cette pyramide.
   b) Prouver que les plans CMD et MAD sont orthogonaux.

1.11 Géométrie analytique de l'espace.

A (0, 1, 1)   B(1, 0, 1)   C (1, 1, 0)   D(1, 1, 2)   E(-1, 4, 2)

$\pi_1 \equiv 2x - y + 3z - 1 = 0$ $\pi_2 \equiv x - y - z + 2 = 0$

$\pi_3 \equiv x - 3y + 4z - 2 = 0$ $\pi_4 \equiv x - y + z + 1 = 0$

d_1 a pour vecteur directeur $\vec{v}$ (1, 0, 1) et ∋ (1, -1, 0)

d_2 a pour vecteur directeur $\vec{u}$ (1, 0, -1) et ∋ (0, 2, 1)

d_3 de vecteur directeur (1, -2, -1) et ∋ (0, -2, 1)

d_4 de vecteur directeur (1, 2, 3) et ∋ (-2, 0, 1)

d_5 de vecteur directeur (-1, 0, 2) et ∋ (1, 2, -1)

1. a) Déterminer les équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes de π_5 ∋ A, B et C
   b) Déterminer les équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes de la droite AC
   c) Déterminer l'équation cartésienne de $\pi_6 // \pi_1$ et tel que π_6 ∋ D
   d) Déterminer l'équation de $\pi_7 \perp d_2$ et ∋ C
2. a) Déterminer les équations paramétriques de $d = \pi_1 \cap \pi_2$ (préciser un vecteur directeur et un point de cette droite)
   b) Les plans π_1 et π_2 , π_1 et π_3 sont-ils perpendiculaires ?
   c) Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes de $d \perp \pi_1$ et ∋ D
3. $d_1 // \pi_4$? $d_2 // \pi_4$? Sinon, déterminer la coordonnée du point d'intersection.
4. d_3 et d_4 sont-elles a) orthogonales ? b) // ? gauches ? sécantes ? (si oui, déterminer leur point d'intersection)
   Reprendre chacune des questions pour les droites d_3 et d_5
5. a) Calculer la distance de E au plan π_4
   b) Calculer la distance de E à la droite $d \equiv \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$
6. Déterminer l'angle aigu formé par le plan π_4 avec la droite d_1
7. Déterminer les angles formés par les plans π_1 et π_3
8. Déterminer les équations paramétriques de la perpendiculaire commune aux droites d_4 et d_5. Préciser les points de contact de cette droite avec d_4 et d_5
9. Soit $d \equiv \begin{cases} ax - y + az = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ et $\pi \equiv x + y - az + 1 = 0$
   Examinez les positions relatives de d et π en utilisant l'outil de discussion de systèmes d'équations à paramètre.

2. Quelques éléments de solution

2.1 Généralités sur les fonctions.

1. a) $\dfrac{x-6}{-16x+10}$ b) $\dfrac{(x-2)(2x+1)(3x+2)}{(x-2)(3x+2)(x+3)} = \dfrac{2x+1}{x+3}$
2. m = - 3 et p = 1
3. m= 6 ; p= - 78
4. a) A(4, -12) et B(-1, 3) b) pas de points d'intersection
5. a) $]-3\,,\,0] \cup]\frac{1}{2}\,, \rightarrow[$ b) $]-2,\ \frac{3}{5}]$ c) [0.5 ; 1[

   d) $]\leftarrow ; -\sqrt{5}\,]$ e) $]-\infty,\ -\frac{1}{2}\,] \,/\, \{-1\}$
6. a) P.V. total = $-0{,}5\,x^2 + 20\,x + 3000$ où x représente le nombre de jours à partir du 1er octobre
   max pour x = 20 $\Rightarrow$ 20 octobre.
   b) 10 octobre
   c) Aujourd'hui
   d) Le mieux aurait été il y a 10 jours
7. x = côté de la base $\Rightarrow h = \dfrac{100}{x^2} \Rightarrow$ Dépense $= 5{,}5\,x^2 + \dfrac{400}{x}$

   Dépense minimale : 181.1 € lorsque x = 3.31 m et h = 9.11 m
8. f est une fonction du premier degré et f(x) = 1.1 x + 2.4
   g est une fonction du second degré et g(x) = 2.2 x2 – 3x + 5

2.2 Fonctions particulières – Fonctions déduites.

1. Fonctions successives à tracer :

   a) $f_1(x) = \cos x$ $f_2(x) = \cos(\frac{\pi}{4} + x)$ $f_3(x) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$ $f_4(x) = 2\cos(\frac{\pi}{4} - x)$

   $f(x) = 1 + 2\cos(\frac{\pi}{4} - x)$

   b) $f_1(x) = \sqrt{x}$ $f_2(x) = \sqrt{x-3}$ $f_3(x) = \sqrt{2x-3}$ $f_4(x) = 2\sqrt{2x-3}$

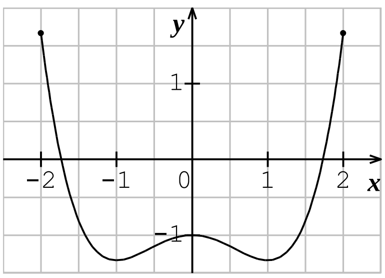
   $f(x) = 3 + 2\sqrt{2x-3}$

   c) $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $f_2(x) = \dfrac{3}{x^2}$ $f_3(x) = \dfrac{3}{x^2} - 2$

   d) $f_1(x) = E(x)$ $f_2(x) = E(x-3)$ $f_3(x) = E\left(\frac{x}{2} - 3\right)$ $f(x) = 2 + E\left(\frac{x}{2} - 3\right)$

   e) $f_1(x) = |x|$ $f_2(x) = |x-1|$ $f_3(x) = |2x-1|$ $f_4(x) = 2\,|2x-1|$
   $f_5(x) = 2\,|2x-1| - 3$

2. Lièvres : $p(t) = 1500 \sin\left(\dfrac{\pi}{60} t\right) + 2000$ Lynx : $p(t) = 750 \sin\left(\dfrac{\pi}{60}(t+30)\right) + 1750$
3. Le graphe suivant satisfait les critères, mais d'autres possibilités existent.



2.3 Progressions arithmétiques et géométriques.

1. $u_n = \dfrac{n-1}{n}$ $u_{1995} = \frac{1994}{1995}$
2. $\frac{63}{2}, \frac{69}{2}, \frac{75}{2}, \frac{81}{2}, \frac{87}{2}$
3. $r = \sqrt{3}$ $t_{10} = 81\sqrt{6}$ $S_{10} = 121\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$

4. 3844 cm
5. Population en 1900 : $8 \cdot 10^6 \cdot (1.02)^{100} = 57\,957\,169$
   Capacité de l'agriculture : $10 \cdot 10^6 + 100 \cdot 500\,000 = 60\,000\,000$
   Pour que l'Angleterre n'arrive plus à nourrir sa population, il faut que $10.10^6 + n \cdot 500\,000 > 8 \cdot 10^6\,(1.02)^n$
   par essais successifs, on trouve $n \cong 103 \Rightarrow$ à partir de 1903, l'Angleterre n'arriverait plus à nourrir sa population selon ces hypothèses.

2.4 Limites – Asymptotes.

1. a) $\lim\limits_{x\to -1} f_1(x) = \frac{1}{2}$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f_1(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f_1(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to \pm\infty} f_1(x) = \mp\infty$

   b) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f_2(x) = +\infty$

   c) $\lim\limits_{x\to 4} f_3(x) = -\frac{3}{10}$

   d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f_4(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \lim\limits_{x\to -\infty} f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

   e) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f_5(x) = +\infty$

2. a) AV en $x = 1$ AO en $\pm\infty$ $y = x + 1$
   b) AV : $x = 1$ AH : $y = 1$
   c) AV : $x = -3$ AH : $y = 3$ en $\pm\infty$
   d) AV : $x = -2$ et $x = 2$ AH : $y = 0$ en $\pm\infty$
   e) AV : / AH / AO : $y = x - \frac{3}{2}$ en $+\infty$ et $y = -x + \frac{3}{2}$ en $-\infty$
   f) AV : $x = 3$ AO : $y = x + 3$ en $\pm\infty$

2.5 Dérivées.

1. a) $35x^4 - 12x^2 + 4x - 5$
   b) $-60\,(1-5x)^2$
   c) $6\,(3x-1)^3\,(2-x^2)^2\,(-5x^2+x+4)$
   d) $\dfrac{-4x}{3\sqrt[3]{1-x^2}}$
   e) $-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-3)^4}}$
   f) $\dfrac{-22x^2-8x+8}{(2x^2-4x)^2}$
   g) $\dfrac{5x^4}{(1+x)^6}$
   h) $\dfrac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$
   i) $\dfrac{6(3x-2)(x-1)}{(1-2x)^4}$
   j) $\dfrac{3x-8}{\sqrt{(2x-2)^3}}$
   k) $\dfrac{11-18x}{2\sqrt{3x-2}}$
   l) $\dfrac{-6}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$
   m) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   n) $8\sin x \cos^2 x - 4\sin^3 x$
   o) $\dfrac{3\cos\sqrt{3x+1}}{2\sqrt{3x+1}}$
   p) $\dfrac{4\sin 2x}{\cos^3 2x}$
   q) $\dfrac{-2\cos 2x}{\sqrt{(1-\sin 2x)(1+\sin 2x)^3}}$
   r) $120\,x \cdot \sin^3(3x^2-2) \cdot \cos(3x^2-2)$

2. a) $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$
   b) $t_1 \equiv y = 4x + 1$ et $t_2 \equiv y = 4x - 7$

2.6 Etudes de fonctions.

Les graphiques de ces fonctions peuvent aisément être vérifiés à l'aide de la calculatrice graphique ou du logiciel géogébra.

1. Fonction homographique : AH : $y = 1.5$ AV : $x = -0.5$ racine : $x = 2$ et $\ni (0, -6)$

2. a) dom f : R/ {-1} pas de racine . f(0) = - 2
AV : x = - 1 A0 : y = - 3x + 4

$f_1\,'(x) = \dfrac{-3x^2-6x+3}{(x+1)^2}$ $f_1\,''(x) = \dfrac{-12}{(1+x)^3}$

		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$	
$f_1\,'$	-	0	+	/	+	0	-
$f_1\,''$	+	+	+	/	-	-	-

b) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ dom f : R/{-1} f(0) = - 1 rac : x = 1
AV : x = - 1
A0 : y = x – 5

$f\,'(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$ $f\,''(x) = \dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$

		-5		-1		1	
$f_1\,'$	+	0	-	/	+	0	+
$f_1\,''$	-	-	-	/	-	0	+

c) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^3}$ dom f : R_0 rac : x = 2
AV : x = 0
AH : y = 0

$f\,'(x) = \dfrac{-x^2+8x-12}{x^4}$ $f\,''(x) = \dfrac{2x^2-24x+48}{x^5}$

		0		2		$6-\sqrt{12}$		6		$6+\sqrt{12}$	
$f_1\,'$	-	/	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f_1\,''$	-	/	+	+	+	0	-	-	-	0	+

3. a) x = 2 f(2) = - 4 $f\,'(2) = \dfrac{-7}{3} \Rightarrow t \equiv 3y + 7x - 2 = 0$

b) $f\,'(x) = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow x = 1$ ou $x = -3$
si x = 1 : f(1) = - 2 et $t_1 \equiv 2y + 3x + 1 = 0$
si x = - 3 : f(-3) = 16 et $t_2 \equiv 2y + 3x - 23 = 0$

2.7 Applications de la dérivée. – Modélisation.

1. $c = \dfrac{10}{\sqrt[3]{3}}$ $h = 5\sqrt[3]{9}$

2. $\left(\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$

3. $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

4. a) Longueur à découper = 3 + x b) $x = \dfrac{5-\sqrt{7}}{3}$
c) On obtient le même volume dans les deux cas : V = 2x (2 – x) (3 – x) donc le même maximum
d) longueur à découper : $\dfrac{H}{2} + x$ si on coupe le long d'un côté et $\dfrac{L}{2} + x$ si c'est le long de l'autre.
$V = \dfrac{1}{2}\,x\,(H-2x)\,(H-2x)$ Max en $x = \dfrac{(H+L)-\sqrt{H^2+L^2-HL}}{6}$

5. a) $v(t) = 3t^2 - 18t + 24$ $a(t) = 6t - 18$ b) a = 0 si t = 3 ⇒ v min = - 3 m/s c) 28 m

2.8 Trigonométrie.

1. a) $\sin a = \frac{15}{17}$ $\cos b = -\frac{3}{5}$ $\sin(a - b) = -\frac{13}{85}$

   b) $\sin 2a = -\frac{12\sqrt{70}}{17^2}$

2. cos a
4. a) tan 3a tan a b) cot 2a
5. a) $x = -\frac{\pi}{6} + k\,2\pi$ ou $x = \frac{11\pi}{18} + k\,\frac{2\pi}{3}$ S.P. : $\left\{\frac{11\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}, \frac{35\pi}{18}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

   b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $x = k2\pi$ ou $x = \frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5}$ S.P. $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right\}$

   c) $x = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ S.P. : $\left\{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

   d) $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ S.P.: $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

   e) CE : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ sol : $x = \frac{\pi}{6} + k\,2\pi$ ou $x = x = \frac{5\pi}{6} + k\,2\,\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ (à rejeter)
   S.P. : $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

   f) $x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi$ ou $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi$ S.P. $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right\}$

   g) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ ou $x = 3{,}53638 + k2\pi$ S.P.: $\left\{\frac{3\pi}{2}; 3{,}53638\right\}$

   h) $x = k\pi$ ou $x = 0{,}29400 + k\pi$ ou $x = -1{,}27679 + k\pi$ S.P. : $\{0, \pi, 0.29400; 3.43559; 1.8648; 5.00639\}$

   i) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ S.P. : $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

6. a) $\frac{3\pi}{4} + k\,6\pi < x < \frac{9\pi}{4} + k\,6\pi$ b) $\frac{-7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$

2.9 Matrices – déterminants – systèmes d'équations.

1. (18 3 4)
2. $S = \left\{\left(\frac{28}{9}, \frac{-23}{9}, \frac{-19}{9}\right)\right\}$
3. a) $S = \{(5-\lambda, 3, \lambda), \lambda \in R\}$ b) $S = \varnothing$
4. si $m \notin \{0, \pm 1\}$ $S = \left\{\left(\frac{-3}{m^2-1}, \frac{1}{m+1}, \frac{-3}{m^2-1}\right)\right\}$

   si m = 0 : $S = \{(3, z-2, z)\ z \in R\}$ si m = 1 : $S = \varnothing$ si m = -1 : $S = \varnothing$.

5. $\begin{cases} 2x + 2y + 20 = 240 \\ 2x + 2z + 20 = 260 \\ 2y + 2z + 20 = 280 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (50, 60, 70)$

2.10 Géométrie dans l'espace.

1. SM $\perp$ AB et S'M $\perp$ AB (justifier) En déduire la thèse
2. AM hauteur du Δ ABC issue de A et DM hauteur du ΔBCD issue de D : M $\in$ [BC] (hypothèse)
   AM $\perp$ BC et DM $\perp$ BC (justifier). En déduire que BC $\perp$ plan AMD (justifier) . En déduire BC $\perp$ AD (justifier)
3. Soit x, y 2 points quelconques de d_2 et x', la projection de x sur d_1.
   Montrer (justifier) que $d_1 \perp$ plan (d_2, x').
   En déduire que $d_1 \perp$ x'y (justifier) et donc x' est la projection de y sur d_2 quel que soit y.
4. a) $|MB| = |MD| = a\sqrt{2}$ $|MC| = a\sqrt{3}$

   b) Volume = $\frac{a^3}{3}$

2.11 Géométrie analytique de l'espace.

1. a) Eq. Paramétriques : $\pi_5 \equiv \begin{cases} x = r + s \\ y = 1 - r \\ z = 1 - s \end{cases}$ et équation cartésienne : $\pi_5 \equiv x + y + z - 2 = 0$

   b) Eq. Paramétriques $AC \equiv \begin{cases} x = r \\ y = 1 \\ z = 1 - r \end{cases}$ et équation cartésienne $AC \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 - x \end{cases}$

   c) $\pi_6 \equiv 2x - y + 3z - 7 = 0$ d) $\pi_7 \equiv x - z - 1 = 0$

2. a) $\begin{cases} x = -4r + 3 \\ y = -5r + 5 \\ z = r \end{cases}$ v dir : ((-4, -5, 1) et ∍ (3, 5, 0

   b) $\pi_1 \perp \pi_2$ π_1 pas $\perp \pi_3$

   c) $\begin{cases} x = 1 + 2r \\ y = 1 - r \\ z = 2 + 3r \end{cases}$ et $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ z + 3y = 5 \end{cases}$

3. $d_1 \cap \pi_4 = \{(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2})\}$ $d_2 \cap \pi_4 = d_2$

4. a) d_3 pas $\perp d_4$ d_3 pas $\perp d_5$ et d_4 pas $\perp d_5$

   b) $d_3 \cap d_4 = \left\{\left(-\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}\right)\right\}$ $d_3 \cap d_5 = \varnothing$: droites gauches

5. a) $d(E, \pi_4) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ b) $d(E, d) = \dfrac{2\sqrt{30}}{3}$

6. Angle aigu entre d_1 et π_4 : 54,73°

7. Angle entre π_1 et π_3 : 26,99°

8. $\begin{cases} x = -\frac{8}{45}r - \frac{10}{9} \\ y = +\frac{2}{9}r + \frac{16}{9} \\ z = -\frac{4}{45}r + \frac{33}{9} \end{cases}$ Points de contact : avec d_4: A $\left(-\frac{10}{9}, \frac{16}{9}, \frac{33}{9}\right)$ et avec d_5 : B $\left(-\frac{58}{45}, 2, \frac{164}{45}\right)$

9. Si a = 0 : $d \cap \pi = \varnothing$: $d \,//\, \pi$

   Si a = - 1 : $d \subset \pi$

   Si $a \neq 0$ et $a \neq -1$: $d \cap \pi = \left\{\left(0, 1, \frac{2}{a}\right)\right\}$