XVIII. Un devoir par chapitre

1. Enoncés

1.1 Etudes de fonctions : rappels et prolongements.

1. En utilisant la méthode la plus efficace, donner toutes les caractéristiques des fonctions suivantes et tracer le graphique de ces fonctions :

   a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

   c) $f(x) = \sqrt{|2x - 3|}$ Préciser la nature du point x = 1.5 et justifier.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x) = x \,.\, \sqrt{x^2 - 4}$
   a) Réaliser l'étude complète de cette fonction
   b) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de cette fonction en son point d'abscisse x = 3
   c) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de cette fonction dont la pente vaut 6
3. Calculer les limites suivantes :

   a) $\lim\limits_{2} \dfrac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$ b) $\lim\limits_{0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$

1.2 Fonctions cyclométriques.

1. Vérifier les identités suivantes :

   a) $\forall\, x \in \mathbb{R} : \sin(\operatorname{arccot} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\cos(\operatorname{arccot} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

   b) $\operatorname{arccot} \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} - \arctan 1 = \operatorname{arccot} \sqrt{2}$
2. Résoudre l'équation suivante sans utiliser la calculatrice: $\arccos(x - 1) + \arcsin 0.6 = \arctan 2$
3. En utilisant les propriétés des fonctions déduites, tracer le graphe des fonctions suivantes (et préciser leur domaine et leurs racines) :

   a) $f(x) = 2 - \arcsin(1 - 2x)$ b) $f(x) = \dfrac{2}{1 - \arccos(1 - x)}$

4. Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan 2x - 2x}{3x - \arcsin 3x}$
5. Une cuve à mazout a la forme d'un cylindre couché. Le diamètre de ce cylindre vaut 1m et sa longueur 3m.
   a) Calculer le volume de mazout restant lorsque la hauteur dans la cuve est de 20 cm.
   b) Résoudre le problème pour une cuve de diamètre 2r, de longueur l et pour une hauteur restante h.

1.3 Fonctions exponentielles.

1. Résoudre les équations suivantes :

   a) $8^{x} = 0{,}0625$ b) $e^{3x+1} = \dfrac{1}{e^2}$

   c) $5^{x+3} - 5^{x+1} = 3000$ d) $5 \,.\, 3^{x-1} - 2 \,.\, 3^{1-x} = 3$
2. Calculer les limites suivantes :

   a) $\lim\limits_{0} \dfrac{e^x - 1}{e^{-x} - 1}$ b) $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{e^{3x} + 3x^2}{4e^x + 2x^2}$
3. Tracer les graphiques des fonctions suivantes en les déduisant des fonctions de référence.

   a) $f(x) = 3 \,.\, 2^{1-x} + 1$ b) $f(x) = \dfrac{3}{1 - 3^{-x}}$

4. Réaliser l'étude complète de la fonction : $f(x) = \dfrac{e^{x+1}}{x}$
5. Une population de bactéries a une croissance exponentielle. Cette population est actuellement au nombre de 8000 unités. En une heure celui-ci est multiplié par 1,5.

a) Exprimer le nombre de bactéries en fonction du temps. Calculer ce nombre après 9h.
b) Après combien de temps approximativement, le nombre de bactéries aura-t-il dépassé les 100 000 ?

1.4 Fonctions logarithmiques et leurs applications.

1. Résoudre les équations suivantes :
   a) $5^{x+1} + 2 \cdot 5^{-x} = 7$
   b) $(\ln x)^2 + \ln x^3 = 6 + \ln x^2$
   c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x^4} - \log_x 3 = 3$
2. Déterminer le domaine de la fonction $f(x) = \sqrt{\ln x + \ln 3 - \ln(2-3x)}$
3. Déterminer le domaine de définition et les racines des fonctions suivantes. En utilisant les propriétés des graphes déduits, tracer le graphe de ces fonctions. Vérifier graphiquement votre résultat.
   a) $f(x) = 1 - \ln 3x$ b) $2 \ln (1 - x)$ c) $\ln (2x + 1)^2$
4. Réaliser l'étude complète de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$
5. En 2010, il y avait environ 6,8 milliards d'hommes sur la terre. On considère que la population mondiale augmente de 5% en 5 ans.
   a) Si ce rythme se maintient, quel sera le chiffre de population mondiale en 2030 ?
   b) En combien d'années un nouveau milliard d'hommes se sera-t-il ajouté aux précédents ?
   c) Exprimer la vitesse de croissance instantanée de la population mondiale. Préciser cette vitesse en 2025.

1.5 Les lieux géométriques.

1. Dans un repère orthonormé Oxy, on considère
   le point A (0, 1) fixe sur Oy
   Un point M, mobile sur Ox
   Un point N, mobile sur Oy, tel que l'angle AMN, de sommet M, soit droit.
   On construit le rectangle NOMP
   On demande de faire un dessin, de déterminer l'équation du lieu de P lorsque M et N varient, et de représenter ce lieu.
2. Déterminer et représenter le lieu des points P dont le rapport des distances à A (2, 1) et à B (8, 4) est égal à 2

1.6 Les coniques : cercles – ellipses – hyperboles

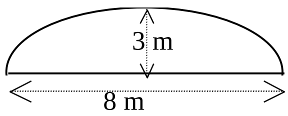
1. Vérifier si l'équation suivante est celle d'un cercle. Si oui, déterminer son centre et son rayon
   $$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 3 = 0$$
2. Déterminer l'équation du cercle passant par A(1, 2) et B(3, 4) et tangent à la droite $d \equiv 3x + y - 3 = 0$
3. Déterminer les équations cartésiennes des ellipses suivantes :
   a) son centre est le point (-1, 2/3), son grand axe mesure 12 et un foyer a pour coordonnée (4, 2/3)
   b) son centre est le point (0, 0) et elle comprend les points (2, 3) et (6, 1)
4. Déterminer les sommets et les foyers de l'ellipse suivante. Représenter.
   $$25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$$
5. Déterminer les équations des tangentes à l'ellipse $E \equiv \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$
   a) en ses points d'abscisse 2
   b) parallèles à $d \equiv 3x + 2y + 7 = 0$
6. Déterminez l'équation de l'hyperbole dont les sommets ont pour coordonnées (±3, 0) et qui passe par le point P(5, 2). Préciser les équations de ses asymptotes
7. Déterminer l'axe focal, les coordonnées des foyers et celles des sommets de l'hyperbole suivante. Préciser les équations de ses asymptotes : $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$
8. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la droite $y = 3x + m$ coupe l'hyperbole, lui est tangente ou lui est extérieure. $H \equiv \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

1.7 Les coniques : paraboles – généralisation

1. Déterminer l'équation de la parabole de foyer F(1, 2) et de directrice $d \equiv x = -3$
2. $P \equiv y^2 + 4x = 0$
   a) tracer cette courbe

b) déterminer les équations des tangentes à P comprenant le point A (2, -1)
c) Quelles sont les coordonnées des points de contact ?

3. Représenter la parabole suivante. Déterminer son foyer, sa directrice, son sommet
$$P \equiv y^2 + 4y - 4x + 8 = 0$$
4. Etablir l'équation d'une parabole d'axe focal horizontal, dont le sommet se trouve à l'origine et qui passe par le point P(7, -3). Déterminer le foyer de cette parabole et la représenter
5. L'excentricité d'une conique est égale à 1.5. Son axe focal est horizontal et la distance focale vaut 6. Déterminer l'équation de cette conique sachant que son centre est le point (1, 2)
6. La cuvette d'une antenne-satellite a la forme d'un paraboloïde dont l'ouverture à son extrémité a un diamètre de 3 m et dont la profondeur est de 0,9 m. A quelle distance du centre de la cuvette doit être placé le récepteur pour recevoir la plus grande intensité d'ondes sonores ?
7. Un pont de forme elliptique est situé au-dessus d'une route. Sa largeur à la base est de 8m et sa hauteur de 3m.
Un transport extraordinaire a une hauteur de 2m50
Quelle est la largeur maximale de ce convoi pour qu'il puisse passer sous le pont ?



1.8 Equations paramétriques d'une courbe. Coordonnées polaires.

1. Dans les systèmes d'équations paramétriques ci-après, éliminer le paramètre pour obtenir une équation cartésienne de l'ensemble de points. Préciser de quelle courbe il s'agit :

a) $\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$

2. Déterminer des équations paramétriques des courbes dont les équations suivent :

a) $3y - 2x + 9 = 0$ b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

1.9 Différentielles et intégrales définies : notions de base.

1. Calculer une approximation de l'aire comprise entre la courbe $y = -x^2 + x + 6$, l'axe des abscisses et les racines de cette fonction en approchant cette aire par une somme de 5 rectangles de largeur identique et représenter. Calculer ensuite la valeur exacte de cette aire par un calcul intégral et comparer les valeurs obtenues.
2. Calculer l'aire comprise entre la parabole $P \equiv y = x^2 - 8x + 20$ et la droite d'équation $y = -x + 10$
3. Calculer l'aire comprise entre les paraboles $P_1 \equiv y = x^2 - x - 12$ et $P_2 \equiv y = -x^2 - x + 6$

1.10 Primitives.

Calculer les primitives suivantes :

1. $\int e^{3\cos 2x} \sin 2x \, dx$
2. $\int \frac{dx}{\tan x}$
3. $\int \frac{2x^3 dx}{\sqrt{1 - x^4}}$
4. $\int \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} dx$
5. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$
6. $\int \frac{2\arctan x}{1 + x^2} dx$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2 + 4x}}$
8. $\int \frac{x + 3}{\sqrt[3]{x^2 + 6x}} dx$
9. $\int (x^3 - x^2) \ln x \, dx$
10. $\int \frac{dx}{4x^2 + 2x + 3}$
11. $\int \frac{x - 2}{x^2 + 1} dx =$
12. $\int \frac{2x^5 - 3x^4 - 3}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx =$

1.11 Applications des intégrales définies.

1. Calculer l'aire comprise entre la courbe $y = \tan x$, l'axe des y et la droite $y = 1$
2. Calculer l'aire des surfaces comprises entre le Cercle de centre O et de rayon 2 et la parabole $y = -x^2 + 2$

3. Etant donné la parabole $y^2 = x - 3$ et la droite $d \equiv y = x - 5$
   a) Calculer l'aire de la surface comprise entre ces deux courbes.
   b) Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des x de la surface limitée par la parabole, la droite d et la droite verticale $x = 5$
   c) Calculer le volume engendré par la rotation de cette même surface autour de la droite $x = 5$

4. a) Réaliser l'étude complète de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ et tracer son graphe.
   b) Calculer l'aire de la région du plan située entre l'axe des x, le graphe de cette fonction et la droite verticale comprenant son extrémum.
   c) Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des x de cette surface

1.12 Analyse combinatoire – Binôme de Newton.

1. De combien de manières différentes peut-on répartir 10 malades
   a) dans 2 chambres contenant l'une 4 lits et l'autre 6 lits ?
   b) dans 3 chambres contenant respectivement 4, 3 et 2 lits, un malade ne trouvant donc pas place ?
   c) dans 3 chambres contenant respectivement 5, 3 et 2 lits ?

2. De combien de manières peut-on organiser 7 analyses médicales sur un patient
   a) sachant qu'une analyse déterminée doit toujours se faire en dernier lieu ?
   b) sachant que 3 analyses doivent toujours se faire le matin à jeun et les quatre autres après le déjeuner ?

3. a) De combien de manières peut-on choisir 3 hommes parmi 15 pour former une groupe de travail ?
   b) De combien de manières peut-on le faire si un homme déterminé doit être inclus dans la sélection ?
   c) Même question si 2 hommes déterminés doivent être exclus de la sélection
   d) Même question si 2 hommes déterminés doivent être exclus et un homme déterminé inclus dans la sélection ?

4. a) Combien peut-on former de nombres de 5 chiffres distincts pris parmi les 9 chiffres significatifs ?
   b) Combien d'entre eux se terminent par 67 ?
   c) Combien d'entre eux commencent par 7 ?
   d) Combien d'entre eux contiennent 8 ?
   e) Combien d'entre eux contiennent 7 et 8 ?
   f) Combien d'entre eux ne contiennent ni 7 ni 8 ?
   g) Combien d'entre eux contiennent 7 et pas 8 ?

5. Combien y a-t-il de plaques d'automobiles différentes formées de trois lettres et trois chiffres
   a) si aucune lettre et aucun chiffre ne peuvent venir plusieurs fois sur une même plaque ?
   b) si les lettres et les chiffres peuvent se répéter.

6. Une classe comporte 9 garçons et 3 filles
   a) de combien de manières le professeur peut-il faire un choix de 4 élèves ?
   b) Combien de ces choix comportent au moins une fille ?
   c) Combien comportent exactement une fille ?

7. Calculer $(\sqrt{3} - 4)^4 - (\sqrt{3} + 4)^4 =$

8. Déterminer le(s) terme(s) milieux du développement de $\left(3x^2 - \dfrac{y}{6}\right)^9$

1.13 Probabilités.

1. D'un jeu de 52 cartes, on tire 4 cartes au hasard. Quelle est la probabilité de tirer
   a) 4 cartes de séries différentes ? (1 pique, 1 trèfle, 1 carreau et 1 cœur)
   b) 4 cartes d'une même série ?
   c) un roi au moins ?

2. Quarante touristes prennent place, par tirage au sort, dans trois véhicules comptant 21, 13 et 6 places. Parmi ces touristes, il y a 13 américains. Quelle est la probabilité de trouver tous les américains dans le car de 13 places ?

3. On prélève au hasard 4 chaussures dans un lot de 10 paires différentes. Quelle est la probabilité pour q'il y ait au moins une paire parmi les 4 chaussures choisies?

4. Une urne contient 60 jetons numérotés de 1 à 60. On tire un jeton. Soit x le numéro du jeton tiré. On considère les événements A : x est divisible par 5 et B : $x \leq 15$
a) Calculer P(A), P(B) et P(A|B)
b) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Pourquoi ?

5. Une boîte contient trois pièces de monnaie; une des pièces est bien équilibrée, une autre est marquée avec deux faces et la troisième est truquée pour que la probabilité de donner face soit égale à 1/3. On choisit une pièce au hasard et on la lance.
a) Calculer la probabilité pour que l'on obtienne face.
b) Si on a obtenu face, quelle est la probabilité que l'on ait pris la pièce marquée de 2 faces ?

1.14 Variables aléatoires – Lois de probabilités.

1. On joue avec deux dés bien équilibrés. On considère la variable aléatoire qui mesure la valeur absolue de la différence des points. Déterminer la fonction de distribution, l'espérance mathématique et l'écart - type de cette variable aléatoire

2. considérons cinq dés dont les faces portent seulement les points 1 ou 2.
A : seulement une face marquée "1"
B : deux faces marquées "1"
C : trois faces marquées "1"
D : quatre faces marquées "1"
E : cinq faces marquées "1"
Avec l'un de ces dés choisi au hasard, on effectue une série de 20 jetés et le point "1" est obtenu 8 fois. Quel est le dé qui a le plus vraisemblablement servi à réaliser cette série ?

3. Une entreprise fabrique certains éléments qu'elle dispose en caisses avant de les envoyer au distributeur. Celui-ci, en extrait 10 au hasard et de manière indépendante. Dès que le nombre d'éléments défectueux excède 2 unités (est strictement supérieur à 2), le distributeur refuse la caisse entière. Sachant que la probabilité qu'un élément soit défectueux pour un tirage donné est de 0.05, déterminer la probabilité de refuser une caisse.

4. Sachant qu'un compteur placé le long d'une autoroute dénombre en moyenne 10 passages par minute. Quelle est la probabilité que 20 véhicules passent en 3 minutes.

5. 350 élèves ont présenté un concours dont les résultats sont distribués selon une loi normale de moyenne 77 et d'écart type 10
a) Evaluer le nombre d'élèves dont le résultat est inférieur à 60
b) Sachant que 250 élèves ont été refusés, déterminer la cote minimale à obtenir pour être accepté.

1.15 Les nombres complexes.

1. a) Résoudre l'équation : $(1 + i)\, x^2 - 5\,(1 + i)\, x + 8 + 6i = 0$
b) Déterminer une équation équivalente à la précédente dont le coefficient de x^2 vaut 1

2. Calculer : $\dfrac{(1-i)^7}{(1+i)^9}$

3. Résoudre : $z^4 = -1 - \sqrt{3}\, i$

4. Résoudre : $z^4 - (15 - 10i)\, z^2 - (16 + 30i) = 0$

5. Démontrer que dans le plan de Gauss, diviser un nombre complexe z par i revient à appliquer à z une rotation d'amplitude $-\dfrac{\pi}{2}$

2. Quelques éléments de solution

2.1 Etudes de fonctions : rappels et prolongements.

1. a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$: dom f :]- ∞, 1] ∪ [2, + ∞ [Racines : 1, 2

   AO : y = x –1.5 en + ∞ et y = -x + 1.5 en - ∞

   Utiliser la calculatrice graphique pour vérifier le graphe obtenu.

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ déduire le graphe de celui de $g(x) = x^2 – 3x + 2$

   Donc f(x) admet des AV en x = 1 et en x = 2 et un maximum au point (1.5, - 4)

   c) $f(x) = \sqrt{|2x - 3|}$: si x > 1.5 alors $f(x) = \sqrt{2x - 3}$ et si x < 1.5 alors $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$ Le graphe peut alors être obtenu par les graphes associés

2. a) Soit f : R → R : x → f(x) = $x . \sqrt{x^2 - 4}$

   dom f :]- ∞, -2] ∪ [2+ ∞[racines : ± 2

   Aucune asymptote

   $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{\sqrt{x^2 - 4}}$ $f''(x) = \dfrac{2x(x^2 - 6)}{\sqrt{(x^2 - 4)^3}}$

		$-\sqrt{6}$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$\sqrt{6}$	
f '	+	+	+	/	/	/	/	/	/	/	/	/	+	+	+
f "	-	0	+	/	/	/	/	/	/	/	/	/	-	0	+

   Graphique à vérifier à l'aide de la calculatrice graphique ou d'un logiciel tel que géogébra

   b) tangente comprenant le point du graphe d'abscisse 3 : $t \equiv \sqrt{5}\, y – 14x + 27 = 0$

   c) Tangentes de pente = 6 $t_1 \equiv y – 6x + 8\sqrt{2} = 0$ $t_2 \equiv y – 6x - 8\sqrt{2} = 0$

   $t_3 \equiv y – 6x + 5\sqrt{5} = 0$ $t_4 \equiv y – 6x - 5\sqrt{5} = 0$

3. a) $\dfrac{9}{8}$ b) 0

2.2 Fonctions cyclométriques.

1. /
2. $x = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}$
3. Tracer successivement les graphes des fonctions :

   a) $f_1(x) = \arcsin x$ $f_2(x) = \arcsin(1 + x)$ $f_3(x) = \arcsin(1 – x)$ $f_4(x) = \arcsin(1 – 2x)$

   $f_5(x) = - \arcsin(1 – 2x)$ $f(x) = 2 – \arcsin(1 – 2x)$

   b) $f_1(x) = \arccos x$ $f_2(x) = \arccos(x + 1)$ $f_3(x) = \arccos(1 – x)$ $f_4(x) = - \arccos(1 – x)$

   $f_5(x) = 1 – \arccos(1 – x)$ $f_6(x)= \dfrac{1}{1 - \arccos(1 - x)}$ $f(x) = \dfrac{2}{1 - \arccos(1 - x)}$

   Vérifier les graphiques à l'aide de la calculatrice graphique ou d'un logiciel tel que géogébra

4. $\dfrac{16}{27}$
5. a) V ≅ 335 litres b) $r^2 \arccos\dfrac{r - h}{r} + (h – r)\sqrt{2hr - h^2}$

2.3 Fonctions exponentielles.

1. a) $x = -\dfrac{4}{3}$ b) x = - 1 c) x = 2 d) x = 1
2. a) – 1 b) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = + \infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \frac{3}{2}$

3. Tracer successivement les graphes des fonctions :

a) $f_1(x) = 2^x$ $f_2(x) = 2^{x+1}$ $f_3(x) = 2^{1-x}$ $f_4(x) = 3.2^{1-x}$ $f(x) = 3.2^{1-x} + 1$

b) $f_1(x) = 3^x$ $f_2(x) = 3^{-x}$ $f_3(x) = -3^{-x}$ $f_4(x) = 1 - 3^{-x}$ $f_5(x) = \dfrac{1}{1-3^{-x}}$ $f(x)=\dfrac{3}{1-3^{-x}}$

Vérifier les graphiques à l'aide de la calculatrice graphique ou d'un logiciel tel que géogébra

4. $f(x) = \dfrac{e^{x+1}}{x}$

dom f = R_0 Racines : / AV : x = 0 ($\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$)

AH en – ∞ : y = 0. pas d'AH ni AO en + ∞

$f'(x) = \dfrac{e^{x+1}(x-1)}{x^2}$ $f''(x) = \dfrac{e^{x+1}(x^2-2x+2)}{x^3}$

		0		1	
f '	-	/	-	0	+
f "	-	/	+	+	+

Min $(1, e^2)$.

Vérifier le graphique à l'aide de la calculatrice graphique ou d'un logiciel tel que géogébra

5. a) $N(t) = 8\,000 \,.\, 1.5^t \Rightarrow N(9) = 307547$ b) au bout de 6 à 7 heures

2.4 Fonctions logarithmiques et leurs applications.

1. a) x = 0 ou $x = \log_5 \dfrac{2}{5} = -0.569$ b) CE : x > 0 Sol : $y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow y = 2, -3 \Rightarrow x = e^2$ ou $x = e^{-3}$

c) CE x > 0 et x ≠ 1 Sol : x = 3 ou $x = \sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}$

2. $\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right[$

3. a) dom f : R_0^+ ; rac.:$x = \frac{e}{3}$ b) dom f : ←, 1[; rac : x = 0

c) dom f : $R \setminus \{-\frac{1}{2}\}$; rac : x = 0 et x = - 1

Graphes et vérifications graphiques : utiliser la calculatrice ou le logiciel géogébra.

4. Dom f : $R_0^+/\{1\}$ AH : / AO : / AV : x = 1

$f'(x) = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$ $f''(x) = \dfrac{2\ln^2 x - 3\ln x + 2}{(\ln x)^3}$

Pour la suite de la solution : vérifier à l'aide de géogébra ou de la calculatrice graphique

5. a) $8.265\ 10^9$ hab. b) en 14,1 ans c) $0.0768 \,.\, 10^9$ hab/an

2.5 Les lieux géométriques.

1. $y = -x^2$ c. à d. une parabole de sommet (0, 0) à exclure du lieu
2. Un cercle de centre (10, 5) et de rayon $2\sqrt{5}$

2.6 Les coniques : cercles – ellipses – hyperboles

1. C (-1, - 2) $R = \sqrt{2}$
2. $C_1 \equiv \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{2}$ et $C_2 \equiv (x-4)^2 + (y-1)^2 = 10$
3. a) $E \equiv \dfrac{(x+1)^2}{36} + \dfrac{(y - 2/3)^2}{11} = 1$ b) $E \equiv \dfrac{x^2}{40} + \dfrac{y^2}{10} = 1$
4. $E \equiv \dfrac{(x-5)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1$ C (5, 2) Sommets : (7, 2) (3, 2) (5, 7) (5, -3) Foyers : $(5, 2 \pm \sqrt{21})$

5. a) $t_1 \equiv \sqrt{3}\,y + x - 5 = 0$ $\quad$ $t_2 \equiv \sqrt{3}\,y - x + 5 = 0$

b) $t_1 \equiv y = -\frac{3}{2}x + \sqrt{27.5}$ $\quad$ $t_2 \equiv y = -\frac{3}{2}x - \sqrt{27.5}$

6. $H \equiv \frac{x^2}{9} - \frac{4y^2}{9} = 1$ $\quad$ Asymptotes : $y = \pm\frac{1}{2}x$

7. $H \equiv \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ $\quad$ axe focal // ox $\quad$ Centre : (1, -1) F ($1 \pm \sqrt{13}$, -1)

Sommets : (3, -1) et (-1, -1) $\quad$ Asymptote oblique : $y + 1 = \pm\frac{3}{2}(x-1)$

8. Si $m = \pm\, 3\sqrt{5}$ alors, la droite est tangente à l'hyperbole.

Si $m < -3\sqrt{5}$ ou $m > 3\sqrt{5}$ alors la droite coupe l'hyperbole en 2 points.

Si $-3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5}$ alors la droite n'a pas de point d'intersection avec l'hyperbole.

2.7 Les coniques : paraboles – généralisation

1. $(y-2)^2 = 8(x+1)$
2. $t_1 \equiv 2y - x + 4 = 0$ et $t_2 \equiv y + x - 1 = 0$ $\quad$ Points de contact : (-4, -4) et (-1, 2)
3. $P \equiv (y+2)^2 = 4(x-1)$ $\quad$ S (1, -2) F (2, -2) et directrice : $d \equiv x = 0$
4. $y^2 = \frac{9}{7}x$ $\quad$ foyer : $\left(\frac{9}{28}, 0\right)$
5. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$
6. 62.5 cm
7. Il faut que la largeur du convoi soit inférieure à $\frac{4\sqrt{11}}{3}$ m $\cong$ 4.42 m

2.8 Equations paramétriques d'une courbe. Coordonnées polaires.

1. a) la droite d'équation $y = 2x - 3$ $\quad$ b) Une ellipse d'équation : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

2. a) $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{2}{3}t - 3 \end{cases}$ $\quad$ b) $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 2 + \sin t \end{cases}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

2.9 Différentielles et intégrales définies : notions de base.

1. Approximation : 21.25 unités d'aire $\quad$ Valeur exacte : $\frac{125}{6}$ unités d'aire

2. 4.5 unités d'aire

3. 72 unités d'aire

2.10 Primitives.

1. $\frac{-e^{3\cos 2x}}{6} + C$
2. $\ln|\sin x| + C$
3. $-\sqrt{1-x^4} + C$
4. $x + \frac{1}{x+1} + C = \frac{x^2+x+1}{x+1} + C$
5. $x \cdot \tan x + \ln|\cos x| + C$
6. $(\arctan x)^2 + C$
7. $\arcsin\frac{x-2}{3} + C$
8. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+6x)^2} + C$
9. $\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right) \cdot \ln x - \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{9} + C$
10. $\frac{\sqrt{11}}{11}\arctan\frac{4x+1}{\sqrt{11}} + C$

11. $\frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x + C$

12. $\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 7x + \frac{13}{4}\ln|x-2| - \frac{115}{12}\ln|x+2| + \frac{4}{3}\ln|x-1| + C$

2.11 Applications des intégrales définies.

1. $\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$ unités d'aire

2. $3\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} \cong 9{,}38$ unités d'aire et deux parties d'aire $\frac{4\pi}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ unités

3. a) 4.5 unités d'aire b) $\frac{10\pi}{3}$ unités de volume c) $\frac{16(2\sqrt{2}-1)}{15}\pi \cong 6.125$ unités de volume

4. a) cfr géogébra b) $1 - \frac{2}{e} \cong 0.2642$ unités d'aire c) $\pi\left[\frac{e^2-1}{4}\right] \cong 5.018$ unités de volume

2.12 Analyse combinatoire – Binôme de Newton.

1. 210 b) 12 600 c) 2 520
2. a) 720 b) 144
3. a) 455 b) 91 c) 286 d) 66
4. a) 15 120 b) 210 c) 1 680 d) 8 400 e) 4 200 f) 2 520
   g) 4 200
5. 224 640 000 b) 351 520 000
6. 495 b) 369 c) 252
7. $-608\sqrt{3}$
8. $t_4 = \frac{189}{8} x^{10} y^4$ $t_5 = -\frac{21}{16} x^8 y^5$

2.13 Probabilités.

1. a) $\frac{13^4}{C_{52}^4} = 0.105$ b) $\frac{4C_{13}^4}{C_{52}^4} = 0.01$ c) $1 - \frac{C_{48}^4}{C_{52}^4} = 0.28$

2. $\# \Omega = P_{40}^{13,21,6}$ $\# A = P_{27}^{21,6}$ $P(A) = \#A / \#\Omega = 8.31 \cdot 10^{-11}$

3. $1 - \frac{18.16.14}{19.18.17} = 0.3065$

4. a) P(A) = 12/60 = 1/5 P(B) = 15/60 = ¼ P(A|B) = 1/5
   b) oui car P(A|B) = P(A)

5. a) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{11}{18}$ b) $\frac{6}{11}$

2.14 Variables aléatoires – Lois de probabilités.

1. $E(X) = \frac{35}{18} = 1.94$ $V(X) = 2.05$ $\sigma(X) = 1.432$

2. P(avoir 8 fois 1) vaut respectivement a) $8.4 \cdot 10^{-3}$ b) 0.1479 c) 0.120 d) $9{,}248\ 10^{-3}$ et e) $1.345 \cdot 10^{-5}$ selon que l'on a le dé A, B, C ou D. Le dé B est celui qui a la plus grande probabilité de donner 8 fois le résultat "1"
3. 0.01150
4. 0.01341
5. a) 16 élèves b) cote minimale : 82.7

2.15 Les nombres complexes.

1. a) $x_1 = 2 - i$ et $x_2 = 3 + I$ b) $x^2 - 5x + 7 - i = 0$
2. $\frac{1}{2}$
3. $z_1 = \sqrt[4]{2}\text{cis}\frac{\pi}{3}$ $z_2 = \sqrt[4]{2}\text{cis}\frac{5\pi}{6}$ $z_3 = \sqrt[4]{2}\text{cis}\frac{4\pi}{3}$ $z_4 = \sqrt[4]{2}\text{cis}\frac{11\pi}{6}$
4. $z_1 = 4 - i$ $z_2 = -4 + I$ $z_3 = 1 - i$ $z_4 = -1 + i$
5. Utiliser l'écriture trigonométrique des nombres complexes et la formule de Moivre.