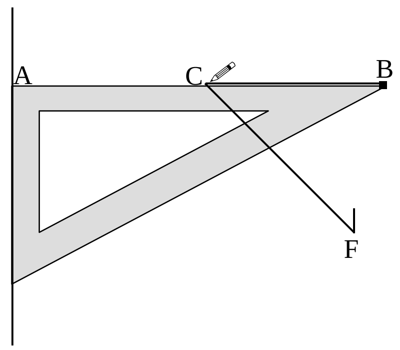
IX. Les coniques (2)
Paraboles - Généralisations.

1 La parabole.

1.1 Où rencontrer la parabole



1. Un fil de longueur égale à un côté de l'angle droit d'une équerre est fixé à un sommet de celle-ci. L'autre extrémité du fil est attachée à une punaise fixée en un point F.
   Si le second côté de l'angle droit est appuyé sur une règle et glisse le long de celle-ci, la pointe C du crayon tendant le fil et l'appuyant contre le premier côté de l'équerre trace un morceau de courbe limité par la longueur de l'équerre. Ce morceau de courbe ressemble à l'idée que nous avons d'une parabole.
2. La section d'un cône par un plan parallèle à une génératrice semble être une parabole.
3. On dispose d'une plaque plane et d'une lampe halogène et on regarde l'ombre d'une balle sphérique sur cette plaque. En déplaçant la lampe, on constate qu'à un moment précis, l'ombre de la balle ressemble à une parabole.
4. Sur une feuille de papier rectangulaire, choisir un des bords et un point F à l'intérieur de la feuille. Répéter un grand nombre de fois la manœuvre suivante : ramener un point de ce bord de la feuille sur le point F et marquer la pliure. Toutes les pliures ainsi obtenues forment l'enveloppe d'une courbe de type parabolique.
5. On considère les points d'intersection entre les droites d'équation : $y = \alpha x$ et $x = \alpha$. Tous ces points décrivent une courbe dite "courbe du maçon" parce qu'elle peut être construite à l'aide de ficelles ou de lattes de bois.

Toutes ces courbes sont-elles de la même nature ? Pour répondre à cette question, nous allons d'abord définir la parabole à partir de la première situation et ensuite voir si les autres courbes sont du même type.

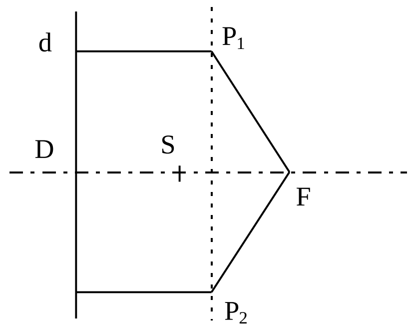
1.2 Définition

Par le procédé employé au point 3.1, les points obtenus sont tels que leurs distances au point F et à la règle sont égales : $|CF| = |CA|$. Cette observation va être la base de la définition de la parabole.

Une parabole est le lieu géométrique des points situés à égale distance d'un point fixe et d'une droite fixe.

Le point fixe est appelé *foyer* et la droite fixe est la *directrice* de la parabole.

De cette définition, on déduit immédiatement que la droite passant par le foyer et perpendiculaire à la directrice est un axe de symétrie de la parabole.



La figure ci-contre le montre aisément.

Soit $DF \perp d$ et P_1 un point de la parabole.$\Rightarrow d(P_1 , d) = d (P_1 , F)$

Soit P_2, le symétrique de P_1 par rapport à FD

Comme la symétrie orthogonale conserve les longueurs, nous avons :

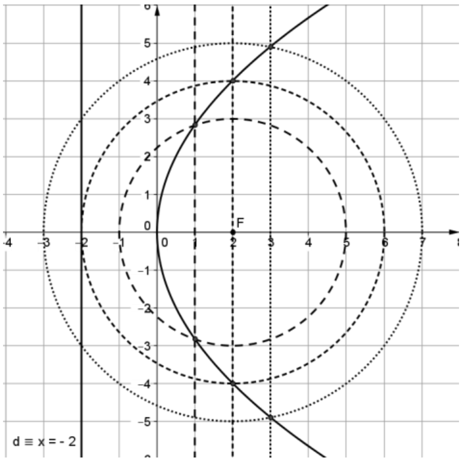
$d (P_2 , d) = d (P_2 , F) \Leftrightarrow P_2 \in$ parabole.

Cet axe de symétrie est appelé simplement *axe de la parabole*. Le point commun à une parabole et à son axe est le *sommet* de cette parabole.

Celui-ci est donc le milieu de la perpendiculaire à la directrice issue du foyer.

1.3 *Méthodes construction*

1.3.1 1ère méthode : intersections de cercles et de droites.



A partir de la définition, on déduit une construction par points de la parabole dont on connaît le foyer et la directrice.

Pour déterminer des points de cette parabole, il suffit de déterminer l'intersection

- du cercle de centre F et de rayon R et
- de la parallèle à d menée à une distance R de la droite d (contenue dans le demi-plan de bord d et comprenant F)

Les points de cette intersection sont des points de la parabole considérée.

Le graphique ci-contre illustre la situation dans le cas d'une parabole de directrice x = -2 et de foyer (2,0)

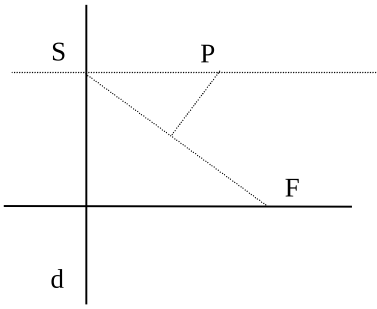
On a tracé les cercles de centre F et de rayons respectifs 3, 4 et 5 permettant à chaque fois de déterminer 2 points de la parabole. Il suffit ensuite de relier ces points.

1.3.2 Utilisation de la méthode en dynamique avec Géogébra

- Tracer une droite AB
- Placer un point extérieur à la droite (le foyer : C)
- Placer un point sur la droite AB (D)
- Tracer la perpendiculaire à la droite AB passant par D
- Placer un point sur cette perpendiculaire : E
- Tracer la // à AB comprenant E
- Tracer le cercle de centre C et de rayon = distance [D,E]
- Utiliser l'outil "Point sur 2 objets" : intersections du cercle et de la droite // à AB
- Activer la trace de ces points.
- Déplacer le point E sur la droite (ou prendre le lieu [G,E] (lieu du point G lorsque E se déplace sur la droite)

Visualisation de la méthode : http://www.geogebratube.org/material/show/id/43488

1.3.3 2ème méthode : utilisations de médiatrices.



Par un point S de la directrice, on mène la perpendiculaire à celle-ci. La médiatrice de [SF] coupe cette perpendiculaire en P qui est un point de la parabole (en effet : | SP | = | PF | par propriété de la médiatrice.)
En déplaçant le point sur la droite d, on obtient une série de points de la parabole.

1.3.4 Utilisation de la méthode en dynamique avec Géogébra

- tracer une droite AB, placer un point extérieur à la droite (le foyer : C) et un autre point sur la droite (D)
- Tracer la perpendiculaire à AB passant par D
- tracer la médiatrice du segment [CD]
- point sur deux objets (la perpendiculaire et la médiatrice) : E
- activer la trace du point d'intersection E et déplacer D sur la droite AB

Visualisation de la méthode : http://www.geogebratube.org/material/show/id/43489

1.4 *Les courbes rencontrées au point 3.1 sont-elles des paraboles ?*

1.4.1 La construction réalisée au point 3.1 à l'aide de l'équerre et d'un fil

La courbe ainsi obtenue est bien évidemment une parabole puisque c'est elle qui nous a permis de donner une définition de la parabole.

1.4.2 La section d'un cône par un plan parallèle à une génératrice

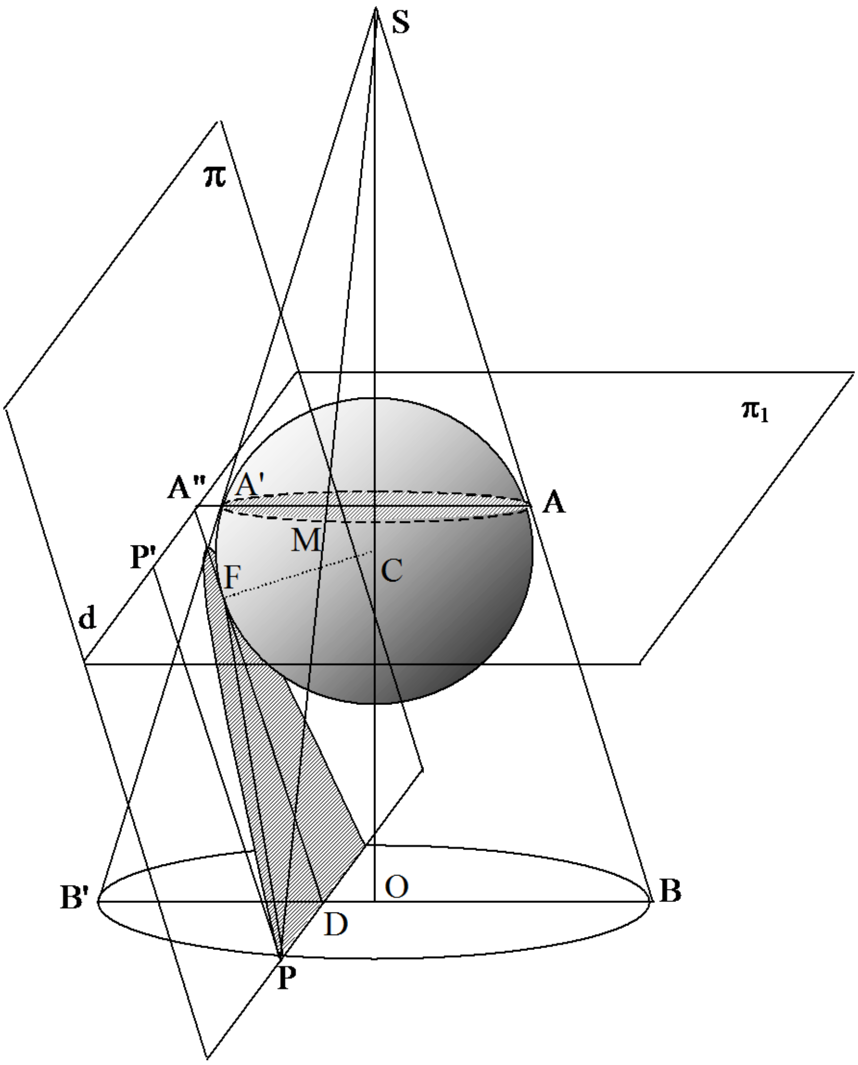
<u>Théorème de Dandelin et Quételet</u> (seconde partie)
La section d'un cône par un plan parallèle à une génératrice du cône est une parabole

La démonstration suivante est donnée pour information.

<u>Hypothèse</u>

Considérons la section du cône de sommet S et d'axe SO par un plan π // à la génératrice SB

- Soit la sphère de centre C inscrite dans le cône, tangente au plan π et située au-dessus de ce plan.
- Soit F le point de contact de la sphère avec le plan π ($\Rightarrow CF \perp \pi$)
- Soit P un point de la section.
- Soit π_1 le plan comprenant le cercle de contact entre la sphère et le cône.
- M = le point d'intersection entre la génératrice du cône SP et le cercle de contact entre le cône et la sphère.
- Soit d, la droite d'intersection des plans π et.π_1
- Soit P' la projection orthogonale du point P sur la droite d
- Le plan perpendiculaire à l'axe du cône comprenant le point P coupe le cône selon un cercle de diamètre BB'



<u>Thèse</u>

La section du cône par le plan π est une parabole

<u>Démonstration</u>

Nous avons : Plan SOB $\cap\ \pi$ = droite comprenant F et // SB : soit FD (car π // SB par hypothèse)

Plan SOB $\cap\ \pi_1$ = AA'

AA' $\cap$ FD = A" = $\pi_1 \cap \pi \cap$ Plan SOB

a) <u>Montrons que PP' // BA</u>

$\begin{cases} SO \perp d \text{ (car } SO \perp \pi_1) \\ CF \perp d \text{ (car } CF \perp \pi) \end{cases} \Rightarrow d \perp$ plan SOB (car elle est orthogonale à 2 droites sécantes de SOB) $\Rightarrow$ d $\perp$ DA" (car DA" $\subset$ plan SOB) $\Leftrightarrow$ PP' // FD

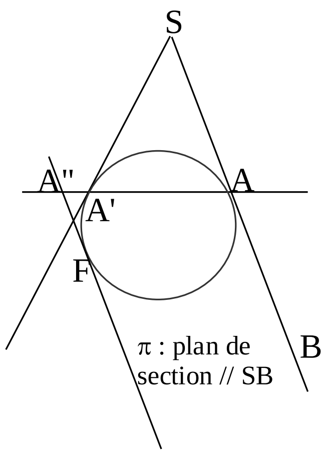
Dans le plan π : $\begin{cases} pp' \perp d \\ DA'' \perp d \end{cases} \Rightarrow$ PP' // DA" or, BA // DA" $\Rightarrow$ PP' // BA

b) $\begin{cases} |PF| = |PM| \text{ (tangentes à une sphère issues d'un même point)} \\ |PM| = |BA| \text{ (génératrices d'un cône)} \\ |BA| = |PP'| \text{ (segments de droites // compris entre des plans //)} \end{cases} \Rightarrow |PF| = |PP'|$

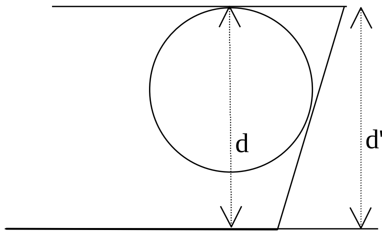
$\Leftrightarrow$ la distance d'un point P quelconque de la section à la droite d est égale à la distance de P à F $\Leftrightarrow$ La section est une parabole de directrice d et de foyer F.

cqfd.

<u>Vue en projection</u>

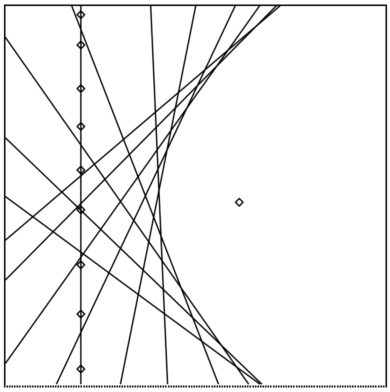


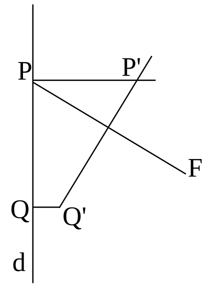
1.4.3 L'ombre à la lampe halogène



Cette ombre peut être considérée comme section plane d'un cône de lumière (comme nous l'avons remarqué lors de l'étude de l'ellipse). Lorsque la lampe est située à la même distance de la plaque que le sommet de la sphère (sur le schéma : d' = d), la section plane est parallèle à une génératrice. Nous sommes donc ramenés au point précédent.

1.4.4 Par les pliages décrits précédemment, on obtient des tangentes à une parabole.





Les deux schémas ci-contre reprennent d'une part l'ensemble des pliages, d'autre part un pliage isolé.

Sur chacune de ces pliures, on peut trouver 1 et un seul point équidistant de F et du bord.

En effet, si en un point P du bord, on trace la perpendiculaire au bord, elle rencontre la pliure médiatrice de PF en un point P' tel que | PP' | = | P'F |

D'autre part P' est le seul point de cette pliure équidistant du bord (droite d) et du point F (foyer).

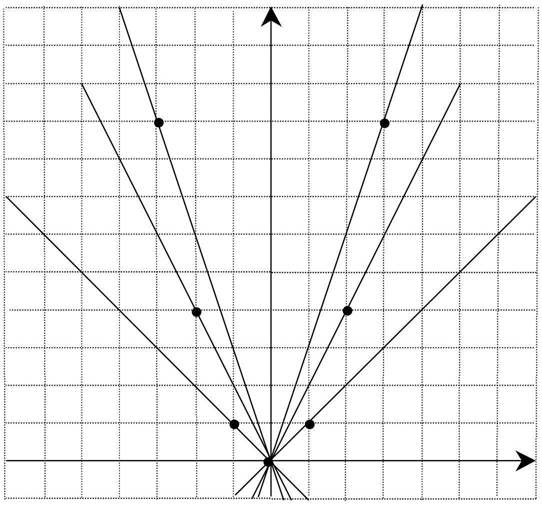
En effet, soit Q', un autre point de la pliure.

Q'P' est médiatrice de [PF] $\Rightarrow$ | Q'P | = | Q'F |

Or | Q'Q | < | Q'P | puisque QQ' est perpendiculaire au bord $\Rightarrow$ | QQ' | < | Q'F | : le point Q' n'est pas équidistant du bord et du point F et le point P' est le seul point de la pliure possédant cette propriété $\Rightarrow$ la pliure est tangente à la parabole de directrice d et de foyer F.

N.B. : nous retrouvons ainsi la seconde méthode de construction de la parabole rencontrée au point 5.2.2

1.4.5 La courbe du maçon est une parabole



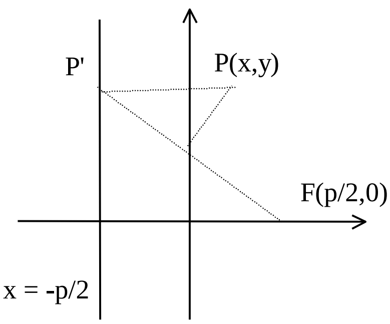
Cette courbe est l'intersection de deux lieux caractérisés chacun par une équation cartésienne: ce sont les équations paramétriques du lieu : $\begin{cases} y = \alpha x \\ x = \alpha \end{cases}$

En éliminant le paramètre α, on obtient l'équation cartésienne : $y = x^2$

Il s'agirait donc d'une parabole décrite dans le cours de quatrième lors de l'étude de la fonction du second degré. Nous allons maintenant vérifier qu'elle correspond bien à une parabole au sens où nous l'avons défini dans ce chapitre, à savoir l'ensemble des points équidistants d'une droite et d'un foyer, mais pour cela, nous allons d'abord établir l'équation cartésienne de la parabole.

1.5 Equation cartésienne de la parabole

Soit à déterminer l'équation cartésienne d'une parabole de foyer F et de directrice d. Soit S le sommet de cette parabole.



La droite FS est l'axe de la parabole.

Choisissons un repère orthonormé de centre S

Si F($\frac{p}{2}$,0) alors la directrice est la droite d ≡ x = - $\frac{p}{2}$

(Nous avons alors |p| = distance entre le foyer F et la directrice d.)

Partant de la définition de la parabole, P(x,y) ∈ parabole ssi sa distance à la directrice égale sa distance au foyer : il faut donc que |PF| = d (P, d)

Considérons donc P' , la projection orthogonale de P sur d.

On a $|PF|^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$

D'autre part $(d(P,d))^2 = |PP'|^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$

Comme $\overline{PF}$ =d (P,d) , on obtient : $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + xp + \frac{p^2}{4} \Rightarrow \boxed{y^2 = 2px}$

Cette dernière équation est celle de la parabole considérée.

$\left|\frac{p}{2}\right|$ est la distance du sommet de la parabole au foyer et à la directrice.

|2p| représente aussi l'ouverture de la parabole au foyer.

En effet : si $x = \frac{p}{2} \Rightarrow y^2 = 2p \cdot \frac{p}{2} = p^2 \Rightarrow y = \pm p$ et donc les points ($\frac{p}{2}$, p) et ($\frac{p}{2}$, - p) ∈ à la parabole. La distance entre ces deux points vaut |2p|.

Exemple :

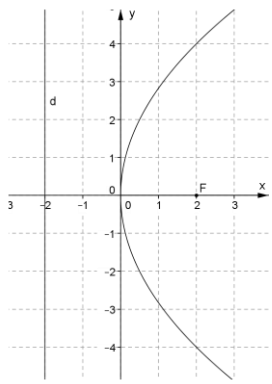
$y^2 = 8x$ est l'équation de la parabole

- de foyer F(2,0)
- de directrice x = -2

Ici, p = 4

Les points (2, 4) et (2, -4) ∈ P

La distance entre ces deux points vaut bien 2p = 8



1.6 Parabole ayant une directrice horizontale et son foyer sur l'axe des y

Considérons le cas d'une parabole de foyer F(0 , $\frac{p}{2}$) et de directrice y = - $\frac{p}{2}$

Dans ce cas, les rôles des variables x et y sont simplement inversés, et nous obtenons facilement l'équation d'une telle parabole : $x^2 = 2py$

Cette dernière équation est celle de la courbe du maçon lorsque $\frac{1}{2p} = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$

1.7 Exercices.

1. Déterminez les équations des paraboles suivantes et les représenter.
   a) Foyer (2,0) Directrice d ≡ x = -2
   b) Foyer (-5,0) Directrice d ≡ x = 5
   c) Foyer (0,2) Directrice d ≡ y = -2

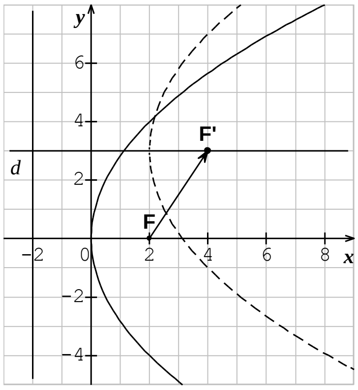
d) Foyer (0,-3) Directrice $d \equiv y = 3$
e) S(0, 0) et F(-3, 0)
f) S(0, 0) et F(0, 4)

2. Tracer les paraboles suivantes. Déterminer leurs foyers respectifs et leurs directrices.
a) $y^2 = 4x$ b) $y^2 = 6x$ c) $y^2 = 2x$
d) $y^2 = -12x$ e) $x^2 = 4y$ f) $x^2 = -6y$

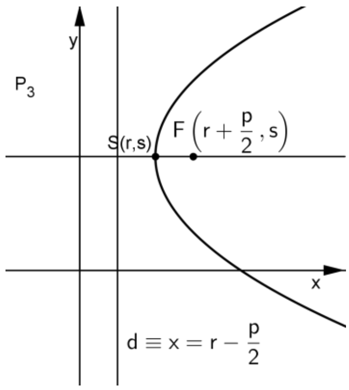
Solutions

1. a) $y^2 = 8x$ b) $y^2 = -20x$ c) $x^2 = 8y$ d) $x^2 = -12y$ e) $y^2 = -12x$ f) $x^2 = 16y$
2. a) $y^2 = 4x$ F(1, 0) et $d \equiv x = -1$ b) $y^2 = 6x$ F(1.5, 0) et $d \equiv x = -1.5$
c) $y^2 = 2x$ F(0.5, 0) et $d \equiv x = -0.5$ d) $y^2 = -12x$ F(-3, 0) et $d \equiv x = 3$
e) $x^2 = 4y$ F(0, 1) et $d \equiv y = -1$ f) $x^2 = -6y$ F(0, -1.5) et $d \equiv y = 1.5$

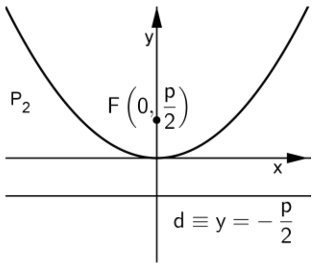
1.8 Equation cartésienne d'une parabole non centrée à l'origine



<u>Exemple</u> :
Soit une parabole $P_1 \equiv y^2 = 8x$ et sa translatée P_2 qui a subi un déplacement d'un vecteur de composantes (2,3)
Nous avons : $(x,y) \in P_2 \Leftrightarrow (x-2,y-3) \in P_1 \Leftrightarrow (y-3)^2 = 8(x-2)$
Cette dernière équation est donc celle de P_2
de sommet (2,3) et de foyer (2 + 2,3) = (4, 3)



En général, une parabole d'équation $y^2 = 2px$ qui subit une translation d'un vecteur de composantes (r, s) a pour équation : $(y - s)^2 = 2p(x - r)$
Son sommet a pour coordonnée (r, s)
Son foyer a pour coordonnée $(r + \frac{p}{2}, s)$
Sa directrice a pour équation : $x = r - \frac{p}{2}$



De même, une parabole d'équation $x^2 = 2py$ qui subit une translation d'un vecteur de composantes (r, s) a pour équation $(x - r)^2 = 2p(y - s)$
Son sommet a pour coordonnée (r, s)
Son foyer a pour coordonnée $(r, s + \frac{p}{2})$
Sa directrice a pour équation : $y = s - \frac{p}{2}$

1.9 Exercices.

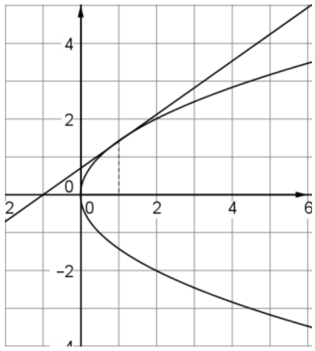
1. Déterminez l'équation de la parabole de foyer (5, 3) et de directrice $d \equiv x = 1$
Représentez cette parabole et déterminez son sommet.
2. Déterminer l'équation de la parabole de foyer (5, - 1) et de sommet (2, -1)
3. $P \equiv y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$
Représenter cette parabole; déterminez son foyer et sa directrice.
4. $P \equiv 4y^2 + 10x - 8y + 5 = 0$
Représenter cette parabole; déterminez son foyer et sa directrice.

5. Déterminez les équations des paraboles suivantes :
   a) F(5, 0) et $d \equiv x = 0$ b) F(5, 3) et S(3, 3)
   c) F(0, 2) et S(0, 3) d) F(2, 3) et $d \equiv y = 5$

Solutions

1. $(y-3)^2 = 8(x-3)$ S(3, 3) axe horizontal
2. $(y+1)^2 = 12(x-2)$
3. $(y+1)^2 = 4(x-2)$ S(2, -1) F(3, -1) $d \equiv x = 1$
4. $(y-1)^2 = -\frac{5}{2}\left(x+\frac{1}{10}\right)$ $S\left(-\frac{1}{10}, 1\right)$ $F\left(-\frac{29}{40}, 1\right)$ $d \equiv x = \frac{21}{40}$ axe horizontal
5. a) $y^2 = 10\left(x-\frac{5}{2}\right)$ b) $(y-3)^2 = 8(x-3)$ c) $x^2 = -4(y-3)$ d) $(x-2)^2 = -4(y-4)$

1.10 Tangentes à la parabole.



Comme dans le cas de l'ellipse, nous allons considérer le problème de la recherche de tangentes à la parabole à partir d'exemples

__Problème 1__

Soit à déterminer l'équation de la tangente à la parabole $P \equiv y^2 = 2x$ en son point T d'abscisse 1 et d'ordonnée positive.

Précisons tout d'abord les coordonnées du point de contact.

$x = 1 \Rightarrow y^2 = 2$ et $y = \pm\sqrt{2}$

Comme le point de contact a une ordonnée positive : T(1, $\sqrt{2}$)

Il nous reste maintenant à déterminer le coefficient angulaire de la tangente. Pour cela, nous devons calculer la valeur de la dérivée y '.

En dérivant les 2 membres de l'équation $y^2 = 2x$ nous obtenons $2y\,y' = 2 \Rightarrow y' = \frac{1}{y}$

au point T, $y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ équation de la tangente : $y - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) \Rightarrow t \equiv x - \sqrt{2}\,y + 1 = 0$

__Problème 2__

Soit à déterminer les équations des tangentes à la parabole $P \equiv y^2 = 2x$ issues du point de coordonnée (-1, $\frac{1}{2}$)

Il faut donc que le système suivant admette une seule solution.

$$\begin{cases} y-\frac{1}{2} = m(x+1) \\ y^2 = 2x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ l'équation $y - \frac{1}{2} = m\left(\frac{y^2}{2}+1\right)$ admet une seule solution.

Cette équation équivaut à $2y - 1 = my^2 + 2m \Leftrightarrow my^2 - 2y + 2m + 1 = 0$

Comme cette équation admet une seule solution, son réalisant est nul

c.-à-d.: $\rho = 4 - 4m(2m+1) = 4 - 8m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m^2 + m - 1 = 0 \Rightarrow m = -1$ ou $m = \frac{1}{2}$

si $m = \frac{1}{2} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1) \Rightarrow 2y - x - 2 = 0 \equiv d_1$

si $m = -1 \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -1(x+1) \Rightarrow 2y + 2x + 1 = 0 \equiv d_2$

Et nous avons bien ainsi déterminé les équations des tangentes à la parabole issues du point (-1, $\frac{1}{2}$)

1.11 Exercices.

1. Déterminez l'équation de la tangente à la parabole $P \equiv y^2 = 2x$ en son point d'abscisse 2 et d'ordonnée positive.
2. Soit la parabole $P \equiv y^2 = 6x$
   a) Déterminez les équations des tangentes à cette parabole en ses points d'abscisse 2
   b) Déterminez les équations des tangentes à P passant par (-2, 3).
3. On donne la parabole $P \equiv y^2 = 2x$ ainsi que la droite $d \equiv x + y - 4 = 0$.
   a) construire P et d

b) Calculer les coordonnées des points A et B communs à P et à d.
c) Ecrire les équations des tangentes à P en A et en B. Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection I ?
d) Calculer la mesure de l'aire du triangle ABI.

Solutions

1. t ∍ (2, 2) $y' = 0.5 \Rightarrow t \equiv 2y - x - 2 = 0$
2. a) $t_1 \ni (2, 2\sqrt{3})$ $y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t_1 \equiv 2y - \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} = 0$

   $t_2 \ni (2, -2\sqrt{3})$ $y' = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t_1 \equiv 2y + \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 0$

   b) d ∍ (-2, 3) et $m = \dfrac{-6 \pm \sqrt{84}}{8} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{21}}{4} \Rightarrow m_1 = 0.39$ et $m_2 = -1.89$

   $t_1 \equiv y - 0.39x - 3.78 = 0$ et $t_2 \equiv y + 1.89x + 0.78 = 0$
3. a) / b) $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow$ A(2, 2) et B(8, -4)

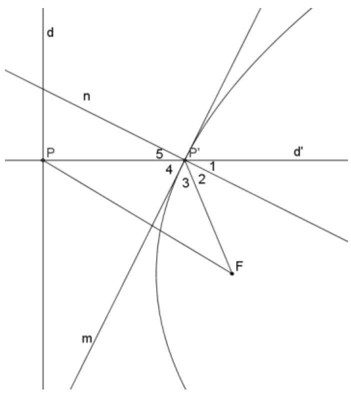
   c) en A : $y' = 0.5 \Rightarrow t_1 \equiv 2y - x - 2 = 0$ en B (8, -4) : $y' = -0.25 \Rightarrow t_2 \equiv 4y + x + 8 = 0$
   $t_1 \cap t_2 = I(-4, -1)$

   d) $d(I, AB) = \dfrac{9}{\sqrt{2}}$ = hauteur ⇒ aire = |AB| . h . 0.5 = 27

1.12 Propriété de réflexion de la parabole.

Un rayon lumineux parallèle à l'axe d'une parabole se réfléchit en passant par le foyer de cette parabole.

Comme dans le cas de l'ellipse, il faut donc montrer en utilisant la propriété physique "un rayon incident se réfléchit de manière telle que l'angle d'incidence égale l'angle de réflexion ", que le rayon réfléchi, d'un rayon incident parallèle à l'axe de la parabole, passe par le foyer de la parabole.



Reprenons la construction de la parabole par la méthode des médiatrices.

Soit P, un point de la directrice d, et m, la médiatrice de PF

Soit d' la perpendiculaire à d comprenant le point P.

{P'} = m ∩ d' est un point de la parabole de directrice d et de foyer F.

Nous retrouvons en fait ainsi la situation du pliage de la feuille où nous avons montré que la médiatrice m est tangente à la parabole.

Soit d', un rayon incident parallèle à l'axe de cette parabole

Traçons n, la normale à la parabole (perpendiculaire à m passant par P') (⇒ n // PF car ce sont deux perpendiculaires à une même droite dans un plan)
Observons les angles ainsi formés. Nous avons :

$$\begin{cases} \hat{P}'_1 = \hat{P}_1 \text{ (angles correspondants.)} \\ \hat{P}_1 = \hat{F}_1 \text{ (car m médiatrice de [PF])} \\ \hat{F}_1 = \hat{P}'_2 \text{ (angles alternes – internes)} \end{cases} \Rightarrow \hat{P}'_1 = \hat{P}'_2$$

L'angle $\hat{P}'_2$ (formé par P'F et la normale) est donc égal à l'angle d'incidence $\hat{P}'_1$.

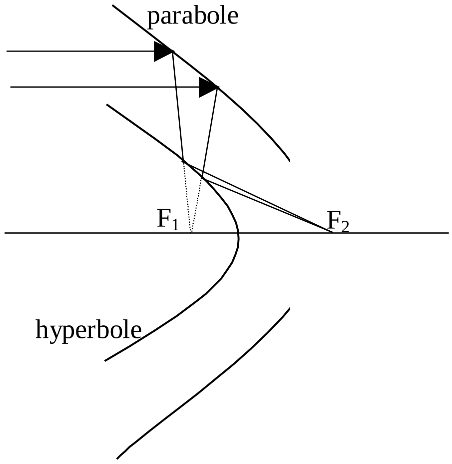
$\hat{P}'_2$ est donc l'angle de réflexion et le rayon réfléchi est bien le rayon P'F

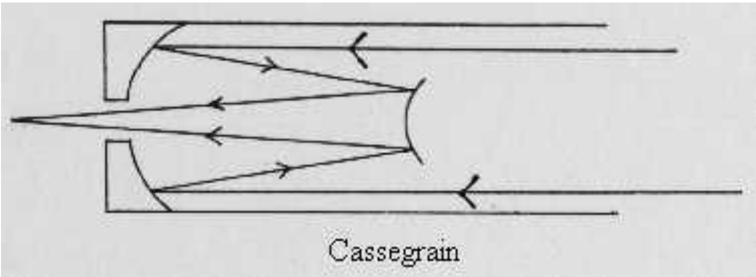
Cette propriété est particulièrement employée dans des applications concrètes : télescope, phare de voiture, projecteur, antenne parabolique, four solaire, antennes pour les systèmes radars, radiotélescopes et microphones de terrain en football américain….

Les propriétés de réflexion des coniques ont donné lieu à des applications importantes telle celle du télescope de Cassegrain.

1.13 Application : le télescope de Cassegrain

Conçu en 1672, le télescope de Cassegrain repose sur les propriétés de réflexion de la parabole et de l'hyperbole. Il se compose de deux miroirs, l'un parabolique et l'autre hyperbolique de même foyer et de même axe de symétrie. Leur concavité étant dirigée dans le même sens. Le miroir parabolique extérieur au miroir hyperbolique est percé d'une ouverture près de l'axe de symétrie. Tous les rayons lumineux parallèles à l'axe commun sont reflétés en convergeant vers le foyer commun, mais ils se réfléchissent alors sur l'hyperbole et sont alors redirigés vers le second foyer de l'hyperbole en passant par l'ouverture du miroir parabolique. Il suffit alors de situer l'œil de l'observateur à la place de ce second foyer comme l'illustre le schéma ci-contre.





Cassegrain

2 L'excentricité : point de vue unificateur sur les coniques.

Nous avons étudié séparément les trois types de courbes appelées coniques. Le cône est le premier élément qui les rassemble, c'est d'ailleurs cela qui leur donne leur nom. Un autre point de ressemblance est leur propriété de réflexion.

Nous allons maintenant nous intéresser à un troisième point de ressemblance : c'est ce qu'on appelle l'excentricité d'une conique.

La parabole est le lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite est égal à 1. Si nous nous posons maintenant la question : en quoi consiste le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe est constant ?

Considérons trois situations :

a) Le rapport est égal à 0.5

b) Le rapport est égal à 1

c) Le rapport est égal à 2.

En utilisant la première méthode de construction de la parabole (recherche des points d'intersection de cercles de centre F et de rayon r avec les // à d construites à une distance respectivement égale à 2r, r ou 0,5r) nous obtenons dans le premier cas une ellipse, dans le second une parabole et dans le troisième une hyperbole.

Visualisation de cette propriété : http://www.geogebratube.org/material/show/id/43490

Partant de cette observation, on peut conjecturer que l'on va obtenir une ellipse, une parabole ou une hyperbole lorsque le rapport est respectivement plus petit que 1, égal à 1 ou supérieur à 1.

Nous savons déjà que ces trois courbes peuvent être obtenues comme sections planes d'un cône circulaire droit. Reprenons le schéma de cette situation déjà rencontrée pour y trouver le rapport des distances considérées.

Soit π un plan quelconque sécant avec le cône.

Soit la sphère tangente au cône et au plan π inscrite dans la partie du cône entre le plan π et le sommet S du cône.

Soit π_1 le plan comprenant le cercle de contact entre la sphère inscrite et le cône.

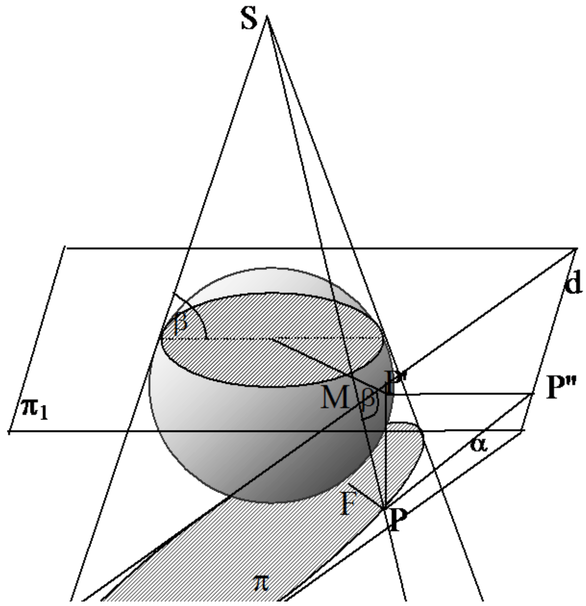
Soit F le point de contact de la sphère inscrite avec le plan π

Soit β l'angle formé par une génératrice quelconque du cône avec le plan perpendiculaire à l'axe du cône (donc avec π_1)

Soit d la droite d'intersection des deux plans π et π_1 et α l'angle entre ces deux plans.

La nature de la section par le plan π dépend de la position du plan de section par rapport au cône. Cette position peut être déterminée en fonction des angles α et β

Si $\alpha < \beta$ alors le plan π coupe toutes les génératrices d'une même nappe du cône et on a une ellipse.



Si $\alpha = \beta$ alors le plan π est parallèle à une génératrice du cône et on a une parabole.

Si $\alpha > \beta$ alors le plan π coupe les deux nappes du cône et on a une hyperbole.

Notons par P un point quelconque de la conique, par P' sa projection orthogonale sur le plan π_1 et par P" sa projection orthogonale sur la droite d. Alors, dans le triangle rectangle PP'P" on a : $\frac{|PP'|}{|PP''|} = \sin\alpha$

$\Rightarrow d(P, d) = |PP''| = \frac{|PP'|}{\sin\alpha}$ (1)

Soit M le point du cercle de contact appartenant à la génératrice SP

Nous avons : $|PF| = |PM|$ car ce sont deux segments tangents à la même sphère issus du même point P.

De plus, le triangle PP'M est rectangle en P' et l'angle $\widehat{PMP'}$ est égal à l'angle β (angles opposés par le sommet)

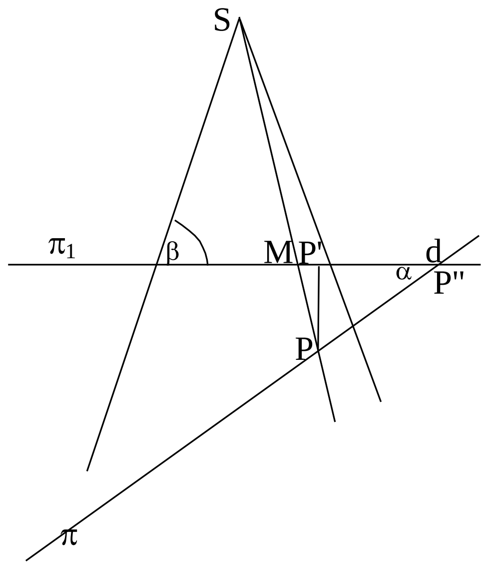
D'où $|PP'| = |PM| \sin\beta = |PF| \sin\beta$ (2)

De (1) et (2) on déduit que :

$d(P, d) = \frac{|PF| \sin\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow |PF| = d(P, d)\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \Leftrightarrow \boxed{\frac{|PF|}{d(P; d)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}}$

où $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ et $0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$

Vue en projection



$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ est donc le rapport des distances du point P au point F et à la droite d et donc 3 cas peuvent se présenter :

- $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ce qui équivaut à une section plane "cercle"
- $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < 1 \Leftrightarrow \alpha < \beta$, ce qui équivaut à une section plane "ellipse"
- $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$, ce qui équivaut à une section plane "parabole"
- $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \beta$, ce qui équivaut à une section plane "hyperbole".

Le rapport $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ s'appelle l'excentricité d'une conique parce qu'il mesure la déformation de la conique par rapport au cercle. En effet quand $\alpha = 0$, on a $\pi = \pi_1$ et $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 0$

En conclusion, à toute conique, on peut faire correspondre un point F et une droite d tels que cette conique peut être considérée comme lieu des points pour lesquels le rapport des distances au point F et à la droite d est constant.

Remarquons qu'au lieu de raisonner avec une sphère située "au dessus" du plan sécant π, on peut aussi raisonner avec une sphère située "au dessous" de ce plan (cfr. Schéma d'accompagnement de la section elliptique du cône au point 3.4.3). On a donc aussi un autre point de contact F' et une droite d'intersection d' également foyer et directrice de la conique et symétrique de F et d. Cela ne peut pas se faire dans le cas d'une parabole.

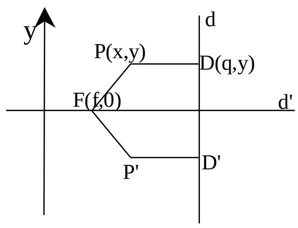
Pour répondre à la question posée au début de ce paragraphe, il reste à vérifier qu'il n'y a pas d'autres courbes que celles-ci comme lieux de points pour lesquels le rapport des distances à un point fixe et à une droite d est constant. Considérons une droite d et un point F et l'ensemble des points P tels que $\frac{|PF|}{d(P;d)} = e$. (e est un nombre positif)

Quand e = 1, nous savons qu'il n'y a que la parabole qui satisfait à cette condition. Considérons donc les cas où $e \neq 1$ et $e > 0$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une conique, nous allons utiliser la méthode analytique en passant par les coordonnées. Pour cela, nous devons choisir les axes ox et oy. Ce choix se fait plus facilement si on connaît les symétries éventuelles du lieu.

Le lieu considéré est symétrique par rapport à la droite perpendiculaire à d et passant par F.

En effet considérons le point P satisfaisant à $\frac{|PF|}{d(P;d)} = e$ Soit P' son symétrique par rapport à la droite d' $\Rightarrow |P'F| = |PF|$ et $d(P',d) = d(P,d)$ et $\frac{|P'F|}{d(P';d)} = e$



Considérons donc la droite d' comme axe ox. A ce stade là, nous ne savons pas s'il y a un autre axe de symétrie. Aussi, nous ne savons pas où placer l'origine avec précision. Plaçons la donc n'importe où et nous allons ajuster notre choix plus tard.

Convenons de noter f l'abscisse du point F et q l'abscisse de D

On a alors : $\frac{|PF|}{d(P;d)} = \frac{|PF|}{|PD|} = e \Leftrightarrow |PF| = e\,|PD| \Leftrightarrow |PF|^2 = e^2\,|PD|^2 \Leftrightarrow (x-f)^2 + y^2 = e^2(x-q)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2fx + f^2 + y^2 = e^2(x^2 - 2qx + q^2) \Leftrightarrow (1-e^2)x^2 + y^2 + 2(-f + e^2q)x = e^2q^2 - f^2$

Si on choisit l'origine du repère de telle manière que le coefficient du terme en x soit nul : $-f + e^2q = 0 \Rightarrow f = e^2q$

L'équation du lieu devient alors : $(1-e^2)x^2 + y^2 = e^2q^2 - f^2$

En remplaçant f par e^2q, le second membre devient : $e^2q^2 - e^4q^2 = e^2q^2(1-e^2)$

L'équation devient alors : $(1-e^2)x^2 + y^2 = e^2q^2(1-e^2)$ (*)

Considérons maintenant deux cas : $0 < e < 1$ ou $e > 1$

1. $0 < e < 1 \Rightarrow 1 - e^2 > 0$
   L'équation peut être mise sous la forme :
   $\frac{(1-e^2)x^2}{e^2q^2(1-e^2)} + \frac{y^2}{e^2q^2(1-e^2)} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{e^2q^2} + \frac{y^2}{e^2q^2(1-e^2)} = 1$
   qui est bien l'équation d'une ellipse.
   Dans cette équation, nous avons : $a^2 = e^2q^2$ et $b^2 = e^2q^2(1-e^2) \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \Leftrightarrow e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2}$
   Or, dans une ellipse : $a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} \Leftrightarrow e = \frac{c}{a}$

2. $e > 1 \Rightarrow 1 - e^2 < 0$ ou $e^2 - 1 > 0$
   En multipliant toute l'équation (*) par – 1, on obtient :
   $(e^2-1)x^2 - y^2 = e^2q^2(e^2-1) \Leftrightarrow \frac{(e^2-1)x^2}{e^2q^2(e^2-1)} - \frac{y^2}{e^2q^2(e^2-1)} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{e^2q^2} - \frac{y^2}{e^2q^2(1-e^2)} = 1$
   Qui est bien l'équation d'une hyperbole.

Dans cette équation, nous avons : $a^2 = e^2q^2$ et $b^2 = e^2q^2\,(e^2 - 1) \Rightarrow \dfrac{b^2}{a^2} = e^2 - 1 \Leftrightarrow \dfrac{b^2 + a^2}{a^2} = e^2$

Or, dans une hyperbole, $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \dfrac{c^2}{a^2} = e^2 \Rightarrow e = \dfrac{c}{a}$

Nous avons ainsi montré qu'il n'y a pas d'autres courbes que l'ellipse, la parabole et l'hyperbole dont les points satisfont à la condition : $\dfrac{|\,PF\,|}{d(P\,;\,d)} = e$ et que de plus, cette excentricité vaut le rapport $\dfrac{c}{a}$ où a vaut le demi axe focal et où c vaut la demi distance focale dans le cas de l'ellipse ou de l'hyperbole tandis qu'elle vaut toujours 1 pour la parabole.

3 Applications générales

1. L'intérieur d'une antenne de satellite TV est formé d'une cuvette ayant la forme d'un paraboloïde dont le diamètre est de 3,6 m et la profondeur de 0,6m. On place le récepteur sur l'axe de ce paraboloïde. A quelle distance du centre de la cuvette faut-il le placer (pour qu'il reçoive le signal maximum) ?
   sol : 1,35 m

2. Le miroir d'un télescope à réflexion a la forme d'un paraboloïde de diamètre 20 cm et de profondeur 2,5 cm. A quelle distance du centre du miroir la lumière va-t-elle se concentrer ? sol : 10 cm

3. Un récepteur parabolique de sons, employé pour des épreuves sportives en plein air, est construit en forme de paraboloïde dont le foyer se trouve à une distance de 13 cm de son sommet. Déterminer la largeur de la cuvette si sa profondeur doit être de 0,6 m ? sol : 1,117 m

L'astronome allemand Johannes Kepler (1571 –1630) formula trois lois qui décrivent le mouvement des planètes autour du soleil. La première stipule que l'orbite de chaque planète dans le système solaire est une ellipse dont le soleil occupe un des foyers. La plupart de ces orbites sont presque circulaires: leurs excentricités sont proches de 0. Seule, Mars, avec une excentricité égale à 0.093 a une orbite plus elliptique : c'est ce qui a permis à Kepler de progresser dans ses recherches.

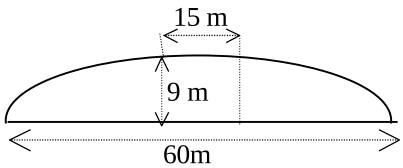
De nombreuses comètes ont des orbites elliptiques, le soleil occupant un de leurs foyers. Dans ce cas, l'excentricité est proche de 1 , et l'ellipse est très plate. Dans les exemples suivants, nous utiliserons l'unité astronomique de distance (UA), c'est à dire la distance moyenne entre la Terre et le Soleil, pour désigner de grandes distances (1 UA = 148 800 000km)

Planète	*Excentricité*
Mercure	0.206
Vénus	0.007
Terre	0.017
Mars	0.093
Jupiter	0.048
Saturne	0.056
Uranus	0.047
Neptune	0.009
Pluton	0.249

4. La comète de Halley a une orbite elliptique d'excentricité e = 0,967, le soleil occupant l'un des foyers de cette ellipse. La plus petite distance à laquelle la comète s'approche du soleil est 0,587 UA. Déterminer la distance maximale entre la comète et le soleil, à 0,1 UA près. sol : d_{max} = 35 UA

5. L'arche d'un pont a la forme d'une demi-ellipse de grand axe horizontal. La base de l'arche a une longueur de 9 m, et la partie la plus haute de l'arche est de 3 m au-dessus d'une route horizontale. Calculer la hauteur de l'arche à 1,8 m du centre de sa base. sol : 2,75 m

6. Un pont doit être construit par-dessus une rivière large de 60 m. L'arche du pont doit être en forme de demi-ellipse et doit être construite de telle sorte qu'un bateau de moins de 15 m de large et 9 m de haut puisse passer sans encombre au-dessous de l'arche comme le montre la figure.
   Déterminer la hauteur minimale de l'arche au milieu du pont.
   sol : h min ≅ 9,3

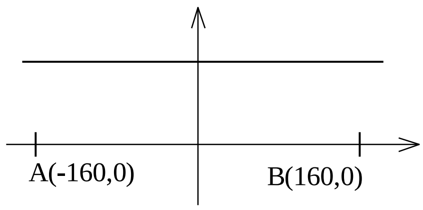


7. Sachant que la longueur du grand axe de l'orbite terrestre est de 297 600 000 km et que son excentricité vaut 0,017, déterminer, à 1000 km près, les distances maximale et minimale entre la terre et le soleil.
   sol : d_{min} = 146 270 400 km d_{max} = 151 329 600 km

8. La planète Mercure parcourt une orbite elliptique dont l'excentricité est de 0,206 et le grand axe a une longueur de 0,774 UA. Déterminer les distances maximale et minimale entre Mercure et le soleil.
sol : d_{min} = 0,307278 UA $\qquad$ d_{max} = 0,466722 UA

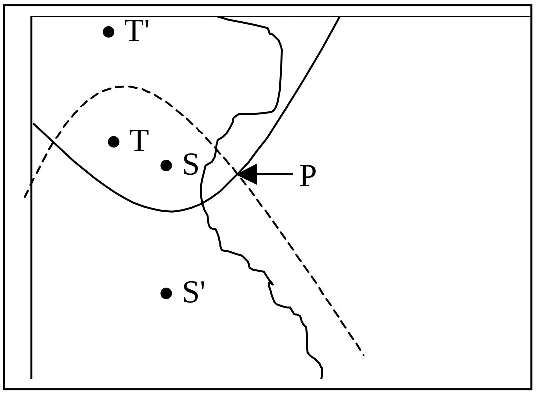
9. Le plafond d'une galerie à écho a la forme d'une hémi-ellipsoïde. Le point le plus haut du plafond se trouve à 4,5 m au-dessus du sol et les sommets sont à 15 m l'un de l'autre. Si deux personnes se trouvent aux foyers F et F ', à quelle distance des sommets se trouvent leurs pieds ? l : 1,5 m – 7,5 m et 13.5 m

10. Un cargo navigue suivant une direction qui se situe à 100 km parallèlement à une côte toute droite. Le bateau émet un signal de détresse qui est reçu par deux postes de garde-côtes A et B, situés à 320 km l'un de l'autre et le long de la côte. En mesurant la différence de temps de réception du signal, il établit que le bateau se trouve 250 km plus près de B que de A. où est le bateau ?
sol : Dans le système d'axes choisi comme la figure ci-contre l'indique, le bateau a pour coordonnée : (176,88; 100))

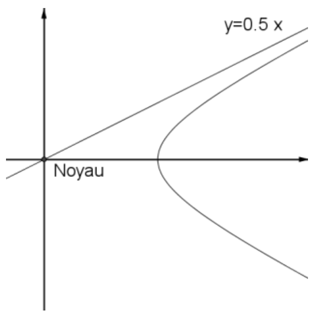


11. Le poste de garde-côtes A est à 200 km à l'est d'un autre poste B. Un navire navigue le long d'une droite parallèle et à 80 km au nord de la droite reliant A et B. Des signaux radio sont émis simultanément à partir de A et B à la vitesse de 300 m/μs. sachant que le signal parti de B à 13h atteint le bateau 400 μs après le signal émis en A au même instant, localiser le bateau à ce moment-là
sol : En choisissant le système d'axes de la même manière que pour l'exercice précédent, le bateau a pour coordonnée : $(60\sqrt{2}\ ;80) = (84,85\ ;\ 80)$

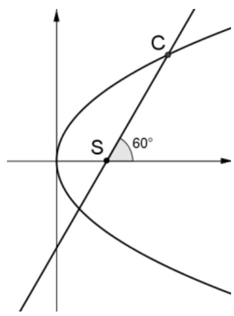
La méthode utilisée dans les 2 exercices précédents sert de base au procédé de navigation appelé LORAN (pour LOng RAnge Aid to Navigation). Ce procédé utilise deux paires d'émetteurs, l'une en T et T' et l'autre en S et S' (voir schéma ci-contre). On peut, grâce au décalage dans le temps de la réception des signaux émis par T et T', calculer la différence entre les distances de P vis-à-vis de T et T', et situer P sur une branche d'hyperbole de foyers T et T'. Faisant de même à partir de S et S', P se trouve sur une branche d'une autre hyperbole de foyers S et S'. Finalement, l'intersection de ces deux branches d'hyperbole détermine la position de P.



12. Le physicien Ernest Rutherford (1871 – 1937) découvrit que, si des particules alpha sont projetées vers le noyau d'un atome, elles peuvent être repoussées par le noyau selon des trajectoires hyperboliques. La figure montre la trajectoire d'une particule qui se dirige vers l'origine le long de la droite $y = \frac{1}{2}x$ et s'approche jusqu'à 3 unités du noyau.
Trouver l'équation de la trajectoire.
sol : $\frac{x^2}{9} - \frac{4y^2}{9} = 1$



13. **Une comète C se déplace suivant une orbite parabolique avec le soleil S en son foyer.
Quand la comète est à 40 millions de km du soleil, la droite passant par le soleil et la comète fait un angle de 60° avec l'axe de la parabole (voir dessin).
Quelle sera la plus petite distance de la comète au soleil ?
sol : 10 millions de km



4 Synthèse.

4.1 Le cercle

$C((0,0),r) \equiv x^2 + y^2 = r^2$

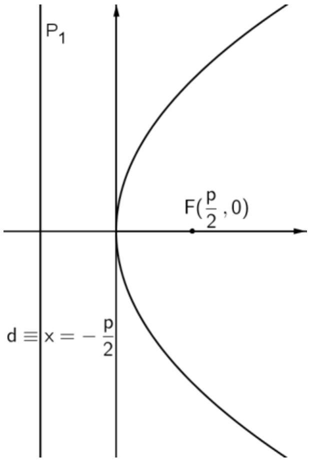
Cercle non centré à l'origine : $C((\alpha,\beta), r) \equiv (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$

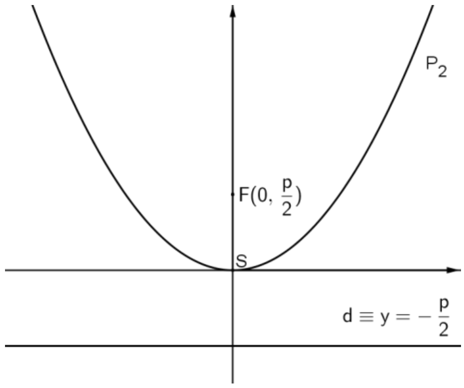
$x^2 + y^2 + ax + bx + c = 0$ est l'équation d'un cercle ssi $a^2 + b^2 - 4c > 0$. Dans ce cas, il s'agit d'un cercle de centre $C(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$

4.2 La parabole

Les courbes dont les équations suivent sont des paraboles

$P_1 \equiv y^2 = 2px$	axe focal : axe des abscisses.	$S(0, 0)$	$F(\frac{p}{2},0)$	$d \equiv x = -\frac{p}{2}$
$P_2 \equiv x^2 = 2py$	axe focal : axe des ordonnées	$S(0, 0)$	$F(0, \frac{p}{2})$	$d \equiv y = -\frac{p}{2}$

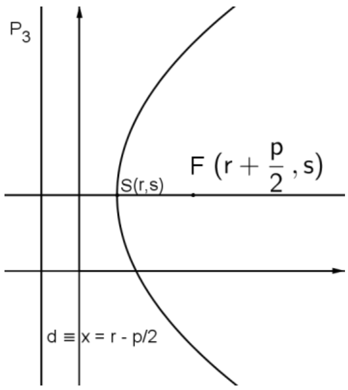


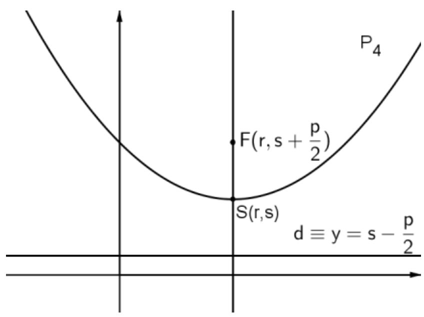


<u>Paraboles non ramenées à l'origine</u> :

$P_3 \equiv (y - s)^2 = 2p(x - r)$	axe focal : $y = s$	$S(r,s)$	$F(r+\frac{p}{2},s)$	$d \equiv x = r - \frac{p}{2}$
$P_4 \equiv (x - r)^2 = 2p(y - s)$	axe focal : $x = r$	$S(r,s)$	$F(r,s+\frac{p}{2})$	$d \equiv y = r - \frac{p}{2}$

N.B. les sommets et foyers de P_3 et P_4 s'obtiennent en additionnant (r, s) aux coordonnées des sommets et foyers respectifs de P_1 et P_2





4.3 L'ellipse

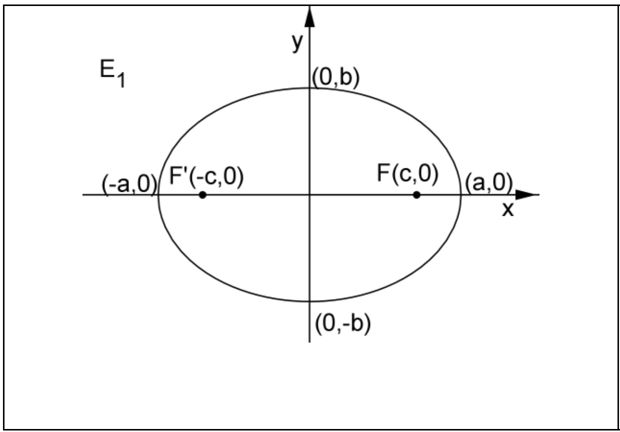
Les courbes dont les équations suivent sont des ellipses ($a, b, c \in R^+$)

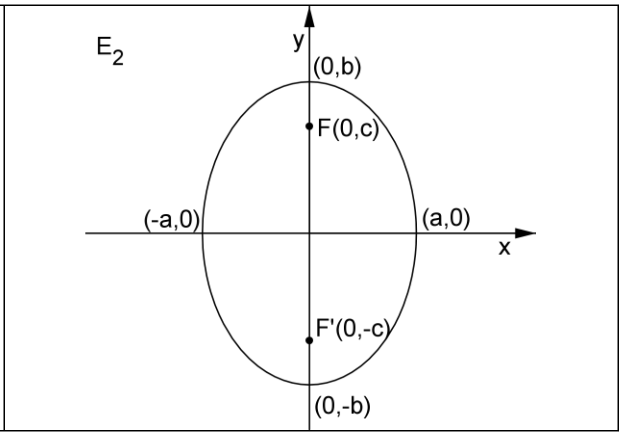
$E_1 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si $a > b \Rightarrow$ axe focal = axe des x $\quad c^2 = a^2 - b^2$

sommets : (-a, 0) (a, 0) (0, b) (0, -b) foyers : (c, 0) (-c, 0) $e = \frac{c}{a}$

$E_2 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Si $a < b \Rightarrow$ axe focal = axe des y $\quad c^2 = b^2 - a^2$

sommets : (-a,0) (a, 0) (0, b) (0, -b) foyers : (0, c) (0, -c) $e = \frac{c}{b}$





Ellipses non centrées à l'origine :

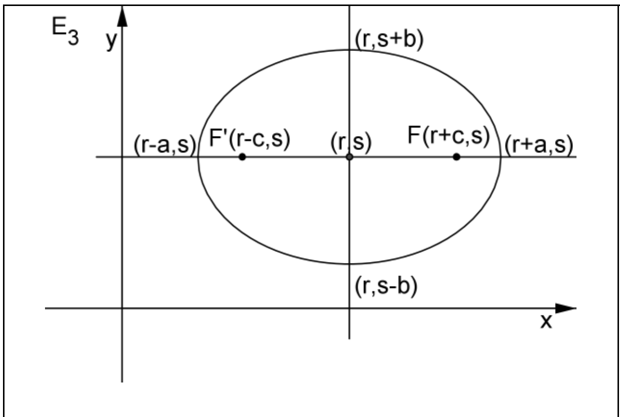
$E_3 \equiv \frac{(x-r)^2}{a^2} + \frac{(y-s)^2}{b^2} = 1$ si $a > b \Rightarrow$ axe focal = $d \equiv y = s \quad c^2 = a^2 - b^2$

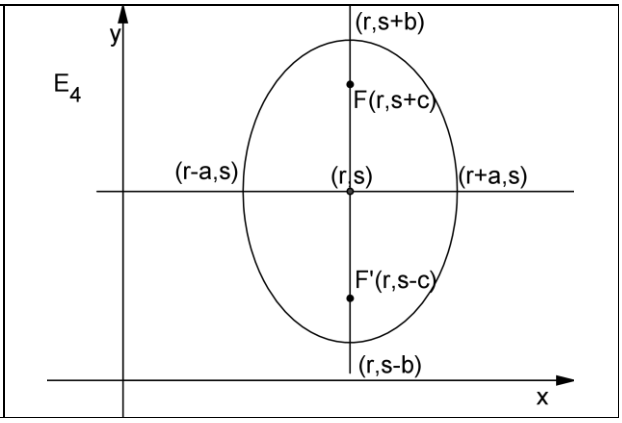
Les sommets et foyers s'obtiennent en ajoutant (r, s) aux coordonnées de ceux de E_1 $e = \frac{c}{a}$

$E_4 \equiv \frac{(x-r)^2}{a^2} + \frac{(y-s)^2}{b^2} = 1$ si $a < b \Rightarrow$ axe focal = $d \equiv x = r$

Les sommets et foyers s'obtiennent en ajoutant (r, s) aux coordonnées de ceux de E_2 $e = \frac{c}{b}$

Excentricité: $(0 < e < 1)$ si e est proche de 0, l'ellipse est proche du cercle.
si e se rapproche de 1, l'ellipse s'aplatit.





4.4 L'hyperbole

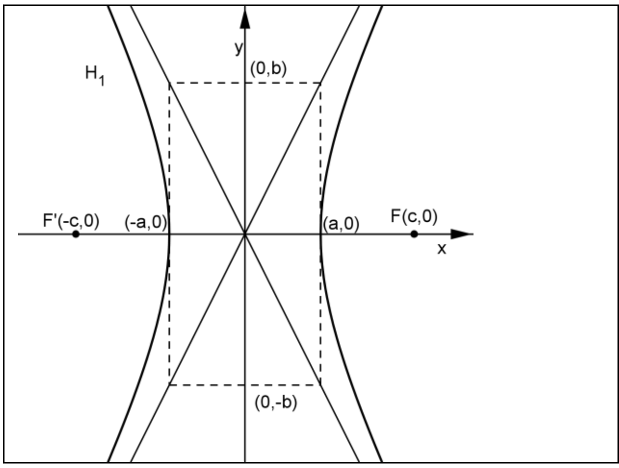
Les courbes dont les équations suivent sont des hyperboles. $(a, b, c \in \mathbb{R}^+)$ $c^2 = a^2 + b^2$

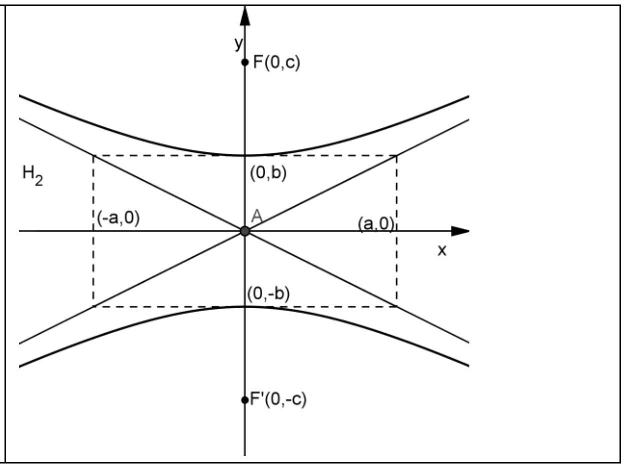
$H_1 \equiv \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ axe focal : axe des x sommets : (-a, 0) (a, 0) foyers : (c, 0) (-c, 0)

asymptotes : $y = \pm \dfrac{b}{a} x$ $e = \dfrac{c}{a}$

$H_2 \equiv \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ axe focal : axe des y sommets : (0,-b) (0, b) foyers : (0, c) (0, -c)

asymptotes : $y = \pm \dfrac{b}{a} x$ $e = \dfrac{c}{b}$

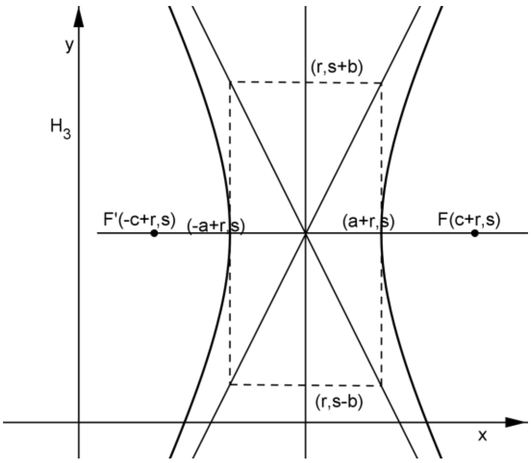


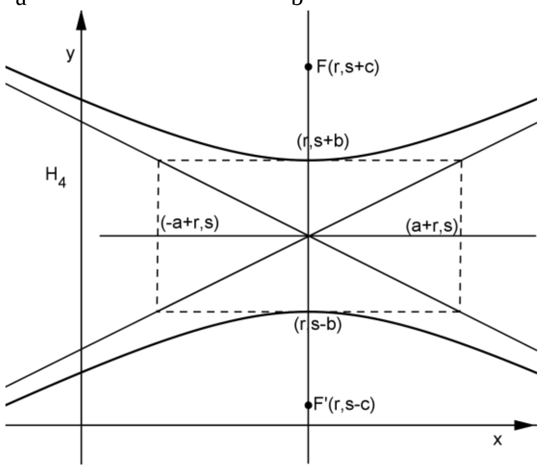


Hyperboles non centrées à l'origine :

$H_3 \equiv \dfrac{(x-r)^2}{a^2} - \dfrac{(y-s)^2}{b^2} = 1$ axe focal : y = s Les sommets et foyers s'obtiennent en ajoutant (r, s) aux coordonnées de ceux de H_1 Asymptotes : $y - s = \pm \dfrac{b}{a}(x - r)$ $e = \dfrac{c}{a}$

$H_4 \equiv \dfrac{(y-s)^2}{b^2} - \dfrac{(x-r)^2}{a^2} = 1$ axe focal : x = r Les sommets et foyers s'obtiennent en ajoutant (r, s) aux coordonnées de ceux de H_2 Asymptotes : $y - s = \pm \dfrac{b}{a}(x - r)$ $e = \dfrac{c}{b}$





Excentricité: e > 1 Plus l'excentricité est grande, plus l'hyperbole est "ouverte".

Hyperbole équilatère : ses asymptotes sont perpendiculaires ⇔ b = a