Memento mathématique

1. Le premier degré.

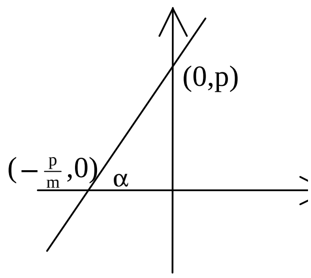
1.1 Equation mx + p = 0 ($\forall$ m, p $\in$ R)

- $m \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{p}{m}$ Sol. unique : $S = \{-\frac{p}{m}\}$
- $m = 0 \Rightarrow 0x = -p$ a) $p = 0 \Rightarrow 0x = 0$ l'éq. est indéterminée : S = R

  b) $p \neq 0 \Rightarrow 0x = -p$ l'éq. est impossible : $S = \varnothing$

1.2 La fonction f(x) = mx + p

Une fonction f : $R \rightarrow R : x \rightarrow f(x) = y = mx + p$



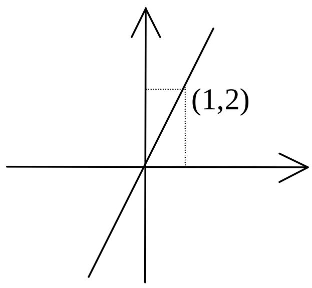
- a pour graphe une droite de pente (ou coefficient angulaire) m

  f est croissante si $m \geq 0$ et décroissante si $m \leq 0$

  En repère orthonormé, m est la tangente de l'angle formé par

  la droite et la partie positive de l'axe des x : $m = \tan \alpha$
- admet pour racine $x = -\frac{p}{m}$(si $m \neq 0$) : la droite coupe l'axe Ox au point $(-\frac{p}{m}, 0)$
- coupe l'axe Oy au point (0, p) ; p est appelé ordonnée à l'origine.

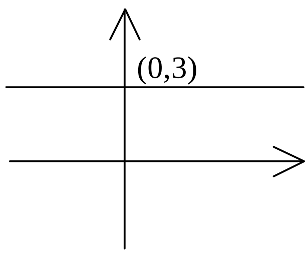
<u>Cas particulier:</u>
si $m \neq 0$ et $p = 0$: $f(x) = mx$ (exemple : $f(x) = 2x$)



Il s'agit alors une fonction linéaire qui admet pour racine x = 0

Son graphe passe par l'origine.

<u>Remarques:</u>
Si m = 0 : on a alors une fonction de degré 0



si $m = 0$ et $p \neq 0$: $f(x) = p$ (exemple: $f(x) = 3$)

Nous avons une fonction constante qui n'admet pas de racines.

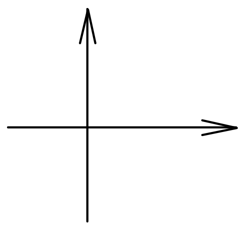
Elle est à la fois croissante et décroissante : sa pente est nulle.

- si m = 0 et p = 0 : f(x) = 0

  Il s'agit alors de la fonction constante nulle , de pente nulle

  qui admet une infinité de racines.

  Son graphe est l'axe Ox



1.3 Signe du binôme mx + p $(m \in R_0)$

Le binôme mx + p est du signe de m au-delà de la racine $(-\frac{p}{m})$ et du signe contraire de m avant la racine.

x		-p/m	
mx + p	signe contraire de m	0	signe de m

2. Radicaux et exposants.

$\forall a \in R_0^+ \quad \forall m \in Z \quad \forall p \in N_0 \setminus \{1\}: \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} \qquad a^{\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{a^m}$

$\forall a, b \in R_0^+ \quad \forall m, p \in Q$

$a^m . a^p = a^{m+p} \qquad (a^m)^p = a^{m.p} \qquad (a.b)^m = a^m . b^m$

$\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad a^0 = 1 \ (a \in R_0)$

3. Les produits remarquables - factorisation

Les formules suivantes sont à utiliser de gauche à droite pour factoriser ou de droite à gauche pour effectuer selon les cas.

$a^2 - b^2 = (a - b)\ (a + b)$

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

$a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2)$

$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

Ainsi que la formule de factorisation du trinôme du second degré :

$ax^2 + bx + c = \quad a\ (x - x_1)\ (x - x_2) \quad \text{si } \rho > 0$

$\qquad\qquad\qquad a\ (x - x_1)^2 \quad \text{si } \rho = 0$

4. Le second degré.

4.1 Equation du second degré à une inconnue.

$ax^2 + bx + c = 0$ $a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$ $\rho = b^2 - 4ac$: le réalisant

- $\rho > 0 \Rightarrow$ 2 racines réelles $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\rho}}{2a}$
- $\rho = 0 \Rightarrow$ 1 racine double réelle $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
- $\rho < 0 \Rightarrow$ pas de racine réelle.

Lorsque l'équation a des racines, leur somme $S = \frac{-b}{a}$ et leur produit $P = \frac{c}{a}$

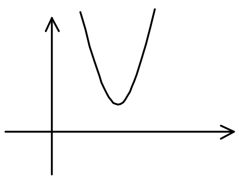
4.2 La fonction du second degré.

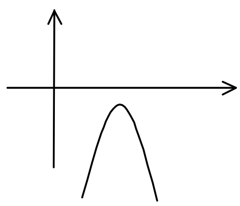
Le graphe d'une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$

- admet toujours pour axe de symétrie la droite $x = \frac{-b}{2a}$
- a un extrémum de coordonnée $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\rho}{4a}\right)$

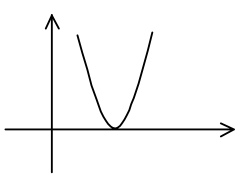
<u>Si a > 0, la parabole a un minimum</u>   <u>Si a < 0, la parabole a un maximum.</u>

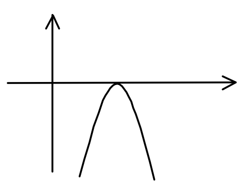
Si $\rho < 0$, elle ne coupe pas l'axe des x



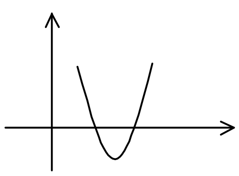


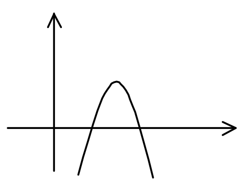
Si $\rho = 0$, elle est tangente à l'axe des x





Si $\rho > 0$, elle coupe l'axe des x en x_1 et x_2 solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$





4.3 Signe du trinôme du second degré.

Le trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a sauf en ses racines (lorsqu'elles existent) où il s'annule et entre ses racines où il est du signe contraire de a.

<u>ρ > 0</u>

x		x_1		x_2	
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	s. contr de a	0	signe de a

<u>ρ = 0</u>

x		$x_1 = x_2$	
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

<u>ρ < 0</u>

x	
$ax^2 + bx + c$	signe de a

5. Progressions arithmétiques et géométriques.

<u>Progressions arithmétiques :</u>

Terme général : $t_n = t_1 + (n - 1)\ r$

Somme des termes : $\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{t_1 + t_n}{2}\ n$

<u>Progressions géométriques :</u>

Terme général : $t_n = t_1 \cdot q^{n-1}$

Somme des termes : $\sum_{i=1}^{n} t_i = t_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$

6. Polynômes

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ $(a_n \neq 0)$: un polynôme de degré n.

a_n , a_{n-1}, ...a_2 , a_1 , a_0 sont les coefficients du polynôme. a_0 est son terme indépendant.

Division Euclidienne

Diviser un polynôme P(x) (dividende) de degré n par un polynôme D(x) (diviseur) de degré m (tel que $m \leq n$), c'est déterminer un polynôme Q(x) de degré n - m (quotient) et un polynôme R(x) de degré < m tels que P(x) = D(x) . Q(x) + R(x)

<u>*Exemple :*</u>

Soit à diviser le polynôme
$p(x) = 3x^4 - 2x^3 - 3$ par $x^2 - 2x$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -2x^3 & +0x^2 & +0x & -3 & x^2 - 2x \\
\cline{6-6}
-3x^4 & +6x^3 & & & & 3x^2 + 4x + 8 \\
\cline{1-2}
 & 4x^3 & +0x^2 & & & \\
 & -4x^3 & +8x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & +8x^2 & +0x & & \\
 & & -8x^2 & +16x & & \\
\cline{3-4}
 & & & +16x & -3 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow 3x^4 - 2x^3 - 3 =$
$(x^2 - 2x) . (3x^2 + 4x + 8) + (16x - 3)$

<u>Propriété</u> : Le reste de la division d'un polynôme p(x) par x - a vaut p(a)

$\Rightarrow$p(x) est divisible par (x – a) ssi p(a) = 0

Et donc : $x^m - a^m$ est toujours divisible par x - a

$x^m - a^m$ est divisible par x + a si m est pair

$x^m + a^m$ n'est jamais divisible par x - a

$x^m + a^m$ est divisible par x + a si m est impair

<u>Cas particulier</u> : division d'un polynôme par (x - a) : Tableau de Horner

<u>*Exemple*</u> : Soit à diviser

$p(x) = 3x^5 - 2x^3 + 2x - 3$ par $x + 2 = x - (-2)$

	3	0	-2	0	2	-3
- 2		- 6	12	-20	40	-84
	3	- 6	10	-20	42	-87
	Coefficients du quotient					Reste

$\Rightarrow 3x^5 - 2x^3 + 2x - 3 =$

$(x + 2)(3x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 20x + 42) - 87$

7. Equations de la droite (dans le plan).

$d \ni (x_1, y_1)$ et de pente $m \Rightarrow d \equiv y - y_1 = m(x - x_1)$

$d \ni A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$

- $(x_1 \neq x_2) \Rightarrow m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- $x_1 = x_2 \Rightarrow$ m n'existe pas et d // axe des ordonnées: $d \equiv x = x_1$
- $y_1 = y_2 \Rightarrow m = 0$ et d // axe des abscisses : $d \equiv y = y_1$

$d \equiv ax + by + c = 0 \Rightarrow$ pente $= m = -\dfrac{a}{b}$ (si $b \neq 0$)

$d' \equiv a'x + b'y + c' = 0 \Rightarrow$ pente $= m' = -\dfrac{a'}{b'}$ (si $b' \neq 0$)

$d \,//\, d' \Leftrightarrow m = m' \Leftrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$ (si $a', b' \in R_0$) $d \perp d' \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{m'}$ (ou $aa' + bb' = 0$)

8. Milieu, longueur

$A(a_1, a_2)$ $B(b_1, b_2)$ mil de [AB] : $P\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}, \dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$

dist (A, B) $= |AB| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

9. Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

9.1 Méthode générale : la substitution

A partir d'une des équations, on exprime une inconnue en fonction de l'autre et on la remplace dans la seconde équation.

9.2 Cas particulier : Système de 2 équations du 1^er^ degré à 2 inconnues

1) Méthode des combinaisons linéaires.

2)Système de Cramer : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ $a, b, c, a', b', c' \in R$

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ (Déterminants associés au système)

a) $D \neq 0 \Rightarrow$ Syst. à sol. unique : $S = \left\{\left(\dfrac{D_x}{D}, \dfrac{D_y}{D}\right)\right\}$

b) $D = 0$ et D_x et $D_y = 0 \Rightarrow$ système indéterminé : infinité de solutions.

c) $D = 0$ et (D_x ou $D_y \neq 0$) $\Rightarrow$ système impossible : $S = \varnothing$

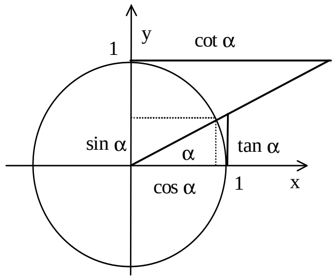
Cette méthode est facilement généralisable à un système 3×3

10. Trigonométrie.

1. Interprétation graphique des nombres trigonométriques

Si $\alpha \neq (2k + 1)\,90°$ ($k \in \mathbb{Z}$):

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ et $\text{séc}\,\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$



$\alpha \neq k180°$ ($k \in \mathbb{Z}$)

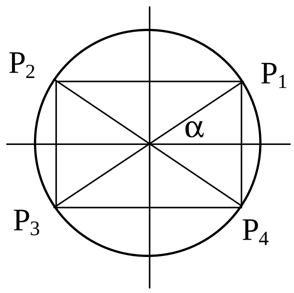
$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ et $\text{coséc}\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

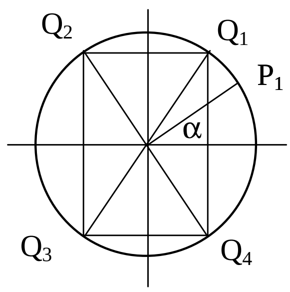
2. Formule fondamentale et ses formules dérivées.

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ $\qquad 1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\qquad 1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

3. Angles associés

Par les figures ci-dessous, on détermine aisément les relations du tableau suivant :





P_2, P_3 , et P_4 permettent de situer les angles $180° - \alpha$, $180° + \alpha$ et $360° - \alpha \cong -\alpha$

Q_1, Q_2, Q_3, et Q_4 permettent de situer les angles $90° - \alpha$, $90° + \alpha$, $270° - \alpha$ et $270° + \alpha$

$\alpha + \beta = 90°$ $\beta = 90° - \alpha$	$\alpha + \beta = 180°$ $\beta = 180° - \alpha$	$\beta - \alpha = \pm 180°$ $\beta = \pm 180° + \alpha$	$\alpha + \beta = k360°$ $\beta = k360° - \alpha$	$\beta - \alpha = 90°$ $\beta = 90° + \alpha$
$\sin\beta = \cos\alpha$ $\cos\beta = \sin\alpha$ $\tan\beta = \cot\alpha$	$\sin\beta = \sin\alpha$ $\cos\beta = -\cos\alpha$ $\tan\beta = -\tan\alpha$	$\sin\beta = -\sin\alpha$ $\cos\beta = -\cos\alpha$ $\tan\beta = \tan\alpha$	$\sin\beta = -\sin\alpha$ $\cos\beta = \cos\alpha$ $\tan\beta = -\tan\alpha$	$\sin\beta = \cos\alpha$ $\cos\beta = -\sin\alpha$ $\tan\beta = -\cot\alpha$
angles compl.	angles suppl.	angles anti - suppl.	angles opposés.	angles anti - compl.

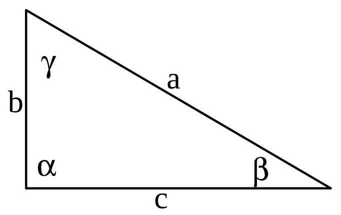
4. *Valeurs.particulières*

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	/

5. *Relations dans les triangles*

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

a) *Dans les triangles rectangles.*



$a^2 = b^2 + c^2$ $\beta + \gamma = 90°$

$b = a\cos\gamma = a\sin\beta = c\tan\beta$

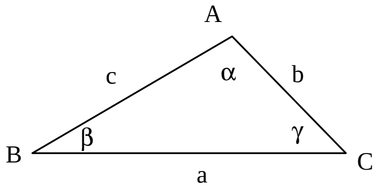
$c = a\cos\beta = a\sin\gamma = b\tan\gamma$

Dans un triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal au produit de

1. l'hypoténuse par le cosinus de l'angle aigu adjacent à ce côté.
2. l'hypoténuse par le sinus de l'angle opposé à ce côté.
3. l'autre côté de l'angle droit par la tangente de l'angle opposé au premier côté.

b) *Dans les triangles quelconques.*

- *Relations aux sinus* : $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$



- *Relations de Pythagore généralisées*.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$

6. Formules d'addition.

$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

$\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$

7. formules de duplication.

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

8.Formules dérivées des formules de duplication (ou formules de Carnot).

$1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$ $\qquad$ $1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$

9. *Formules en fonction de tan $\frac{a}{2}$*

si $a \neq 180° + k360°$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$\sin a = \dfrac{2\tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$ $\qquad$ $\cos a = \dfrac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$ $\qquad$ $\tan a = \dfrac{2\tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}$

10. Formules de Simpson.

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\tan p \pm \tan q = \dfrac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q}$

11. Formules inverses (ou formules de linéarisation)

$2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$

$2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$

$-2 \sin a \sin b = \cos(a + b) - \cos(a - b)$

12. <u>Résolution d'équations trigonométriques.</u> ($k \in Z$)

$\sin b = \sin a \Leftrightarrow \quad b = a + k\,2\pi$ ou $\quad b = \pi - a + k\,2\pi$
$\cos b = \cos a \Leftrightarrow \quad b = \pm a + k\,2\pi$

$\tan b = \tan a \Leftrightarrow b = a + k\,\pi$ C.E. : $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \neq a$

13. <u>Fonctions cyclométriques.</u>

$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x$ et $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x$ et $0 \leq y \leq \pi$

$y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x$ et $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$y = \text{arcot}\, x \Leftrightarrow \cot y = x$ et $0 < y < \pi$

11. Géométrie plane : quelques éléments fondamentaux.

11.1 Droites remarquables

11.1.1 Médiatrice d'un segment

<u>Définition</u> : m est la médiatrice de [A,B] $\Leftrightarrow$ m $\perp$ AB et m $\ni$ le milieu de [A,B]

<u>Propriété</u> : m est la médiatrice de [A,B] $\Leftrightarrow \forall P \in m : |PA| = |PB|$

Tout point de la médiatrice d'un segment est situé à égale distance des extrémités de ce segment et réciproquement

11.1.2 Bissectrice d'un angle

<u>Définition</u> : La bissectrice d'un angle $A\hat{B}C$ est une droite BD ($D \in$ angle $A\hat{B}C$) telle que l'angle formé par les demi-droites [BA et [BD soit égal à l'angle formé par les demi-droites [BD et [BC

<u>Propriété</u> : BD est la bissectrice de $A\hat{B}C \Leftrightarrow \forall P \in BD : d(P, AB) = d(P, AC)$

Tout point de la bissectrice d'un angle est situé à égale distance des côtés de cet angle et réciproquement.

11.1.3 *Médiane d'un triangle*

Définition : une médiane d'un triangle est une droite comprenant un sommet d'un triangle et le milieu du côté opposé à celui-ci

11.1.4 *Hauteur d'un triangle*

Définition : une hauteur d'un triangle est une droite comprenant un sommet de ce triangle et perpendiculaire au côté opposé à celui-ci

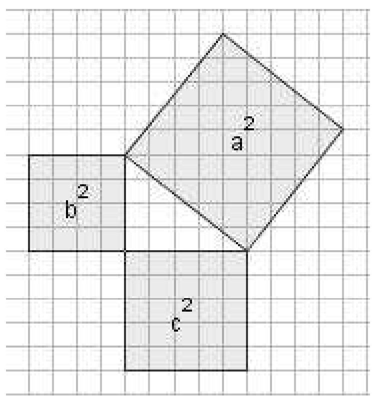
11.2 Points remarquables d'un triangle.

- Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d'intersection des médiatrices de celui-ci.
- Le centre du cercle inscrit à un triangle est le point d'intersection des bissectrices de celui-ci.
- Le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection des médianes. Il est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet.
- L'orthocentre est le point d'intersection des hauteurs.
- Un centre d'un cercle ex-inscrit à un triangle est l'intersection d'une bissectrice intérieure d'un des angles du triangle avec les bissectrices extérieures des deux autres angles. (Il y a donc trois cercles ex-inscrits à un triangle)

11.3 Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse égale la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

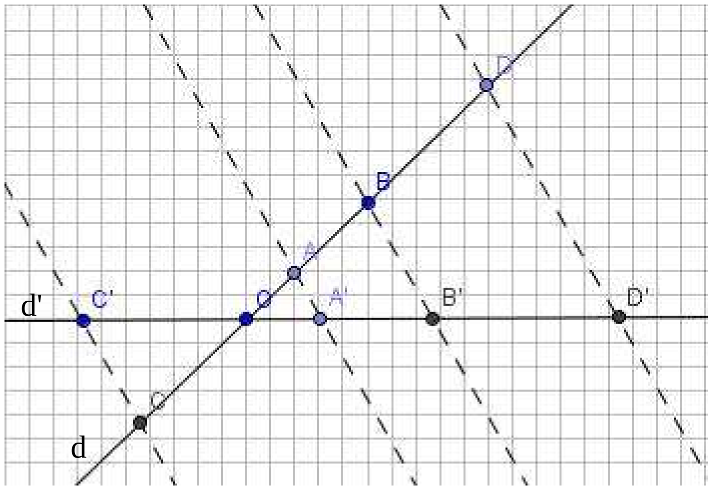


11.4 Théorème de Thalès

Des droites parallèles déterminent sur deux droites fixes des segments homologues de longueurs proportionnelles.

On peut traduire le théorème de Thalès de deux manières

En nous référant au graphique ci-contre, nous avons



a) $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$; $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$

Qui exprime que le rapport des longueurs de deux segments de la droite d est égal au rapport des longueurs des segments homologues de la droite d'

b) $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}$

qui exprime que le rapport de la longueur d'un segment de d à la longueur de son homologue sur d' est constant, quel que soit le couple de segments homologues.

Réciproquement : si deux droites déterminent sur deux droites sécantes des segments homologues de longueurs proportionnelles, alors, ces droites sont parallèles.

Application particulière du théorème de Thalès dans un triangle (connue aussi sous le nom de théorème des milieux) :

Le segment de droite comprenant les milieux de 2 côtés d'un triangle est parallèle au 3ème côté et en vaut la moitié.

11.5 Quelques aires et volumes usuels.

Longueur du cercle : $2\pi R$

Aire du cercle : πR^2

Aire extérieure de la sphère : $4\pi R^2$

Volume de la sphère : $\frac{4}{3}\pi R^3$

Volume du cylindre : $\pi R^2 H$

Vol. du parallélépipède : S_{base} .Hauteur

Volume du cône : $\frac{1}{3}\pi R^2 H$

Vol. de la pyramide : $\frac{1}{3} S_{base}$. Hauteur.

12. Géométrie de l'espace.

12.1 Parallélisme.

1. <u>Critère de parallélisme d'une droite et un plan :</u> une droite est parallèle à un plan ssi elle est parallèle à une droite de ce plan
2. <u>Critère de parallélisme de deux plans</u> : Deux plans sont parallèles ssi l'un d'eux contient deux droites sécantes respectivement parallèles à l'autre.

12.2 Orthogonalité

<u>Définitions :</u>

1. Deux droites sont orthogonales lorsque leurs parallèles menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.
2. Une droite d et un plan α sont orthogonaux lorsque la droite d est orthogonale à toute droite du plan α
3. Deux plans sont perpendiculaires ssi tout plan perpendiculaire à leur droite d'intersection coupe ces plans selon deux droites perpendiculaires.

Critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan est que la droite soit orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Critère d'orthogonalité de 2 plans :

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient perpendiculaires est que l'un d'eux contienne une droite orthogonale à l'autre.

12.3 Plan médiateur

Définition : Le plan médiateur d'un segment [AB] ($A \neq B$) est le plan perpendiculaire à la droite AB passant par le milieu du segment [AB]

Propriété : Dans l'espace, le plan médiateur d'un segment est le lieu des points équidistants des extrémités de ce segment.

13. Géométrie analytique de l'espace

13.1 Equations de plans :

Un plan $\pi \ni A\ (a_1, a_2, a_3)$ et a pour vecteurs directeurs $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$:

Equation vectorielle de π : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + r\vec{u} + s\vec{v}$

Equations paramétriques de π

$$\begin{cases} x = a_1 + ru_1 + sv_1 \\ y = a_2 + ru_2 + sv_2 \\ z = a_3 + ru_3 + sv_3 \end{cases}$$

Equation cartésienne de π :

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & u_1 & v_1 \\ y - a_2 & u_2 & v_2 \\ z - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

13.2 Equations de droites :

Une droite $d \ni A\ (a_1, a_2, a_3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$

Equation vectorielle de d : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + r\,\vec{u}$

Equations paramétriques de d : $\begin{cases} x = a_1 + ru_1 \\ y = a_2 + ru_2 \\ z = a_3 + ru_3 \end{cases}$

Equations cartésiennes de d : si $u_1 , u_2 , u_3 \neq 0$: $\dfrac{x - a_1}{u_1} = \dfrac{y - a_2}{u_2} = \dfrac{z - a_3}{u_3}$

13.3 Vecteur normal à un plan.

$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow \vec{n}(a, b, c)$ est orthogonal à π

13.4 Plans parallèles et plans perpendiculaires.

$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ $\qquad$ $\pi' \equiv a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$\pi \,//\, \pi' \Leftrightarrow \exists\, k \in R : (a, b, c) = k\,(a', b', c')$

si de plus $d = k \,.\, d'$ alors : $\pi = \pi'$

$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow$ leurs vecteurs normaux sont $\perp \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$

13.5 Distance d'un point à un plan

$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ et $P\,(p_1, p_2, p_3) \Rightarrow d(P, \pi) = \dfrac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

13.6 Equation de la sphère

La sphère de centre $C\,(c_1, c_2, c_3)$ et de rayon r : $S \equiv (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = r^2$

14. Les coniques

S = sommet $\qquad$ F = foyer $\qquad$ d = directrice $\qquad$ e = excentricité

14.1 Le cercle

$C((0,0),r) \equiv x^2 + y^2 = r^2$

Cercle non centré à l'origine : $C((a,b), r) \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est l'équation d'un cercle ssi $a^2 + b^2 - 4c > 0$

Dans ce cas, il s'agit d'un cercle de centre $C\left(\dfrac{-a}{2}, \dfrac{-b}{2}\right)$ de rayon $r = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$

14.2 L'ellipse

L'ellipse est le lieu géométrique des points du plan dont la somme des distances à 2 points fixes (les foyers F et F') est une constante (supérieure à la distance focale).

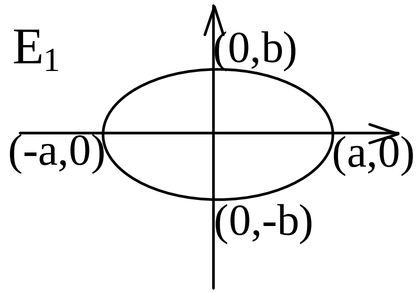
<u>*Ellipses centrées à l'origine*</u> ($a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$)

$E_1 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

si $a > b \Rightarrow$ axe focal = axe des x $\qquad c^2 = a^2 - b^2$

sommets : (-a, 0) (a, 0) (0, b) (0, -b)

foyers : (c, 0) et (-c, 0) $\qquad e = \frac{c}{a}$

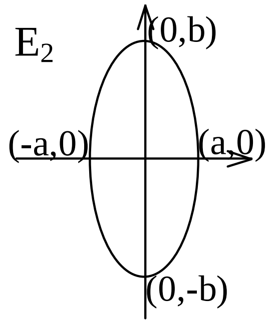


$E_2 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Si $a < b \Rightarrow$ axe focal = axe des y $\qquad c^2 = b^2 - a^2$

sommets : (-a, 0) (a, 0) (0, b) (0, -b)

foyers : (0, c) (0, -c) $\qquad e = \frac{c}{b}$

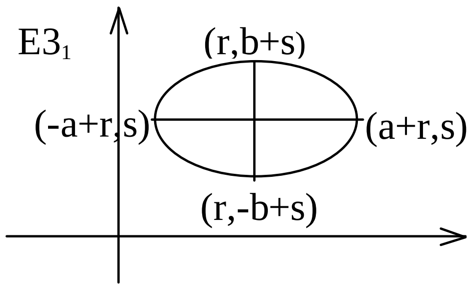


<u>*Ellipses non centrées à l'origine :*</u>

$E_3 \equiv \frac{(x - r)^2}{a^2} + \frac{(y - s)^2}{b^2} = 1$

si $a > b \Rightarrow$ axe focal $\equiv y = s$

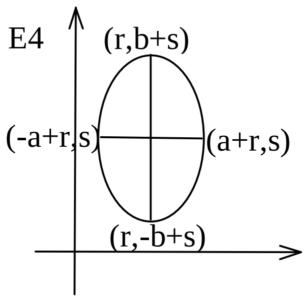
$c^2 = a^2 - b^2 \qquad e = \frac{c}{a}$



$E_4 \equiv \frac{(x - r)^2}{a^2} + \frac{(y - s)^2}{b^2} = 1$

si $a < b \Rightarrow$ axe focal $\equiv x = r$

$c^2 = b^2 - a^2 \qquad e = \frac{c}{b}$



Les sommets et foyers de ces ellipses s'obtiennent en ajoutant (r, s) aux coordonnées respectives des sommets de E_1 ou de E_2

<u>*Excentricité:*</u> $(0 < e < 1)$ si e est proche de 0, l'ellipse est proche du cercle.

si e se rapproche de 1, l'ellipse s'aplatit.

14.3 L'hyperbole

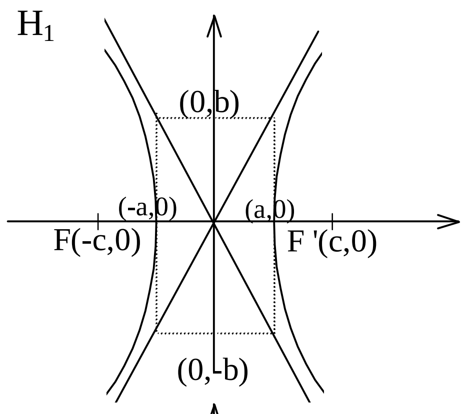
L'hyperbole est le lieu des points dont la différence des distances à 2 points fixes (les foyers F et F') est une constante (strictement inférieure à la distance focale).

Les courbes suivantes sont des hyperboles.
($a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$) $c^2 = a^2 + b^2$

$H_1 \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ axe focal : axe des x

asymptotes : $y = \pm \frac{b}{a} x$ $e = \frac{c}{a}$

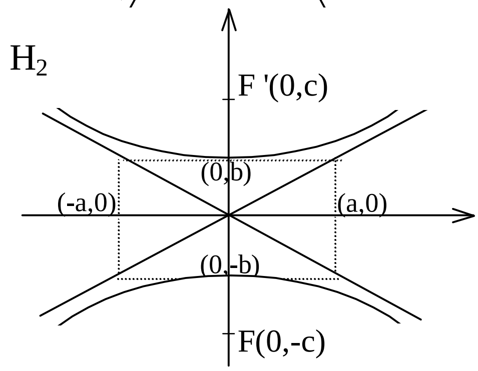
sommets : (-a, 0) (a, 0)
foyers : (c, 0) (-c, 0)



$H_2 \equiv \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ axe focal : axe des y

asymptotes : $y = \pm \frac{b}{a} x$ $e = \frac{c}{b}$

sommets : (0,-b) (0, b)
foyers : (0, c) (0, -c)



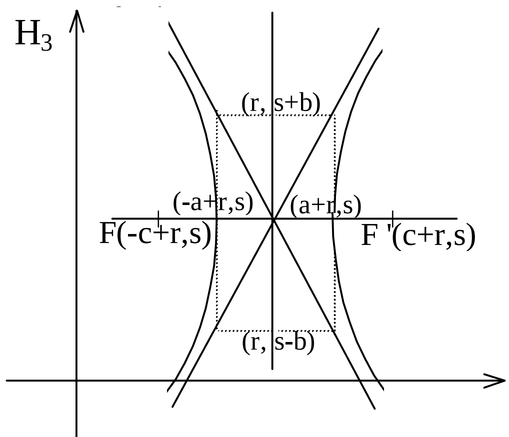
<u>*Hyperboles non centrées à l'origine :*</u>

$H_3 \equiv \frac{(x - r)^2}{a^2} - \frac{(y - s)^2}{b^2} = 1$ axe focal : y = s

Les sommets et foyers s'obtiennent en ajoutant (r, s) aux coordonnées de ceux de H_1

Asymptotes : $y - s = \pm \frac{b}{a}(x - r)$

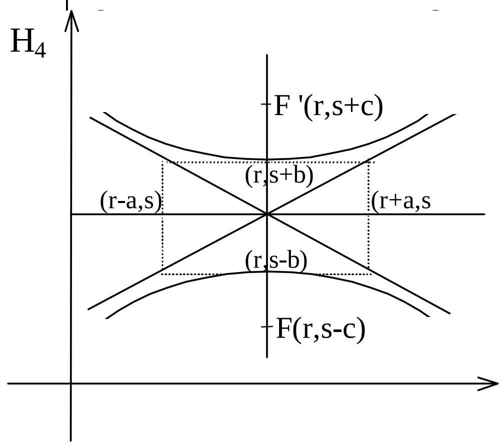
$e = \frac{c}{a}$



$H_4 \equiv \frac{(y - s)^2}{b^2} - \frac{(x - r)^2}{a^2} = 1$ axe focal : x = r

Les sommets et foyers s'obtiennent en ajoutant (r, s) aux coordonnées de ceux de H_2

Asymptotes : $y - s = \pm \frac{b}{a}(x - r)$ $e = \frac{c}{b}$

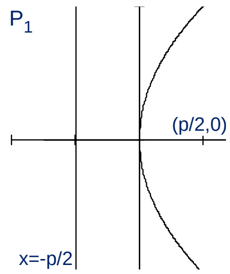


Excentricité: e > 1 Plus l'excentricité est grande, plus l'hyperbole est "ouverte".

Hyperbole équilatère : ses asymptotes sont perpendiculaires $\Leftrightarrow$ b = a

14.4 La parabole

Une parabole est le lieu géométrique des points situés à égale distance d'un point fixe (le foyer F) et d'une droite fixe (la directrice d)



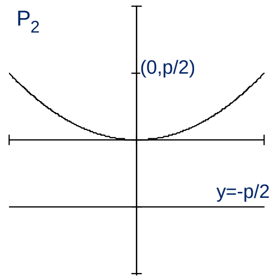
Les courbes dont les équations suivent sont des paraboles :

$P_1 \equiv y^2 = 2px$ axe focal : axe des abscisses.

$S(0, 0)$ $F(\frac{p}{2},0)$ $d \equiv x = -\frac{p}{2}$

$P_2 \equiv x^2 = 2py$ axe focal : axe des ordonnées.

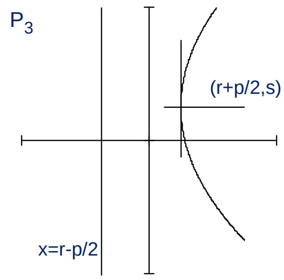
$S(0, 0)$ $F(0, \frac{p}{2})$ $d \equiv y = -\frac{p}{2}$



Paraboles non ramenées à l'origine :

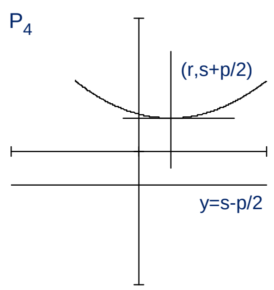
$P_3 \equiv (y - s)^2 = 2p(x - r)$ axe focal : $y = s$

$S(r,s)$ $F(r+\frac{p}{2},s)$ $d \equiv x = r - \frac{p}{2}$



$P_4 \equiv (x - r)^2 = 2p(y - s)$ axe focal : $x = r$

$S(r,s)$ $F(r,s+\frac{p}{2})$ $d \equiv y = s - \frac{p}{2}$



N.B. les sommets et foyers de P_3 et P_4 s'obtiennent en additionnant (r, s) aux coordonnées des sommets et foyers respectifs de P_1 et P_2

15. Limites : résumé des méthodes de calcul.

15.1 Cas d'indétermination

$0 \cdot \pm\infty$	$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$+\infty - \infty$ (ou $-\infty + \infty$)	$\dfrac{0}{0}$
Et aussi : 0^0	1^{∞}	∞^0	0^{∞}

15.2 Fonction de base

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ $\qquad$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

15.3 Limite en un réel non isolé de l'adhérence du domaine de f

15.3.1 1er cas : f est définie en a

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow$ f est continue en a

15.3.2 2ème cas : f n'est pas définie en a

1. Une limite amenant un résultat du type $\frac{r}{0}$ $(r \neq 0)$ est toujours égale à $\pm\infty$. Une étude de signe du dénominateur permettra de déterminer s'il s'agit de $+\infty$ ou de $-\infty$. (Il arrivera fréquemment que la limite à gauche soit différente de la limite à droite.)

2. Dans un cas d'indétermination du type $\frac{0}{0}$, on factorise au maximum par (x - a) le numérateur et le dénominateur et on simplifie.

On a alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a}$ de la forme simplifiée (qui donnera selon les cas un nombre réel ou $\frac{r}{0}$, ce qui nous ramène au premier cas)

S'il s'agit d'expressions comportant des radicaux : on multiplie auparavant numérateur et dénominateur par le binôme conjugué, ou par une expression conjuguée.

15.4 Limites en ± ∞

1. La limite d'un polynôme en $\pm\infty$ = la limite de son terme de plus haut degré en $\pm\infty$
2. La limite d'un quotient de 2 fonctions algébriques en $\pm\infty$ vaut la limite en $\pm\infty$ du quotient des termes de plus haute puissance. ex : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3}}{2x - 5}$
3. La limite en $\pm\infty$ d'une différence de 2 expressions (comportant éventuellement des radicaux) amenant une indétermination telle que $+\infty - \infty$
   Il suffit alors de tenir compte des termes de plus haute puissance et dans certains cas, il faudra auparavant multiplier numérateur et dénominateur par le binôme conjugué, ou par une expression conjuguée.
   ex: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 1} - \sqrt{x^2 - 3}\right)$

15.5 Limites de fonctions trigonométriques.

Pour calculer ce genre de limites, on est souvent amené à utiliser la propriété :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (x exprimé en radians)}$$

15.6 Règle de l'Hospital.

si f, g dérivables sur I et si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ donne une indétermination du type $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$$\text{alors } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si f, g dérivables sur]a,+∞[et si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ amène une indétermination du type $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$$\text{alors } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si f, g dérivables sur]-∞,a[et si $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ amène une indéterm. du type $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$$\text{alors } \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

16. Asymptotes

16.1 Asymptotes verticales.

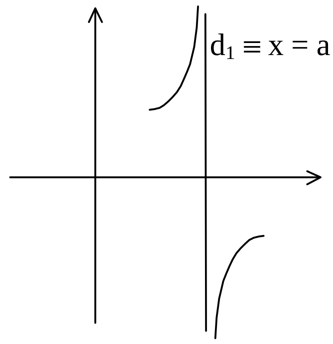
$f : R \to R$ admet une asymptote verticale $d_1 \equiv x = a$

$\Leftrightarrow a \notin \text{dom } f$ mais $a \in \text{adh. dom } f$ et

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to a}} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$ et/ou $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to a}} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$

Cette définition est illustrée par le graphe ci-contre.

(dans le cas représenté : $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to a}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to a}} f(x) = -\infty$)



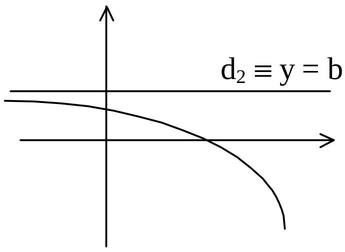
16.2 Asymptotes horizontales.

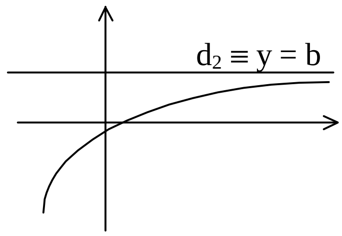
$f : R \to R$

f admet une asymptote horizontale vers la droite : $d_2 \equiv y = b \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

f admet une asymptote horizontale vers la gauche : $d_2 \equiv y = b \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

De nouveau, cette définition est illustrée par les graphes suivants





Le schéma de gauche représente une asymptote horizontale à gauche et celui de droite, une asymptote horizontale à droite.

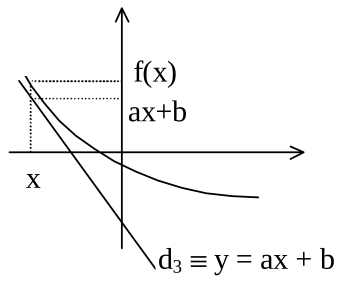
16.3 Asymptotes obliques.

$f : R \to R$ admet une asymptote oblique vers la gauche :

$d_3 \equiv y = ax + b$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = b$

La définition est semblable pour une asymptote oblique vers la droite.

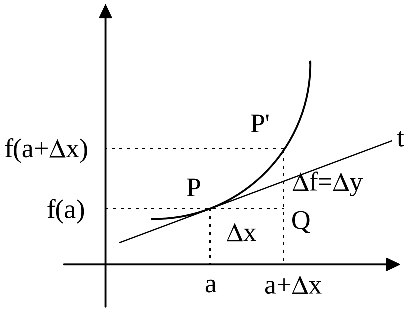


17. Dérivées

17.1 Définition

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

17.2 Interprétation géométrique



$f'(a)$ représente le coefficient angulaire de la tangente t au graphe de f au point (a, f(a))

<u>Equation de la tangente t</u> : $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

17.3 Croissance, décroissance, extrema d'une fonction

Une fonction f(x) est croissante en x = a ⇔ f' (a) est positive

Une fonction f(x) est décroissante en x = a ⇔ f' (a) est négative.

Une fonction f(x) atteint un extremum en (a, f(a)) ⇔ f'(x) s'annule en a en changeant de signe. Si f' (x) passe du négatif au positif, f(x) atteint un minimum. Elle atteint un maximum dans le cas contraire.

17.4 Sens de la concavité - Point d'inflexion

Une fonction f(x) tourne sa concavité vers les y positifs en x = a ⇔ sa dérivée seconde est positive en x = a

Une fonction f(x) tourne sa concavité vers les y négatifs en x = a ⇔ sa dérivée seconde est négative en x = a

Une fonction f(x) admet un point d'inflexion en (a, f(a)) ⇔ f(x) s'annule en a en changeant de signe.

17.5 Points anguleux.

Un point du graphe d'une fonction est un *point anguleux* ssi la dérivée à gauche de ce point n'est pas égale à la dérivée à droite et que l'une de ces dérivées au moins n'est pas infinie.

17.6 Points de rebroussement

Un point du graphe d'une fonction est un *point de rebroussement* ssi la dérivée à gauche de ce point n'est pas égale à la dérivée à droite et que ces deux dérivées sont infinies.

17.7 Dérivées et opérations algébriques.

$(kf)' = kf'$

$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$ et $f(x) \neq 0$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$ et $g(x) \neq 0$

17.8 Dérivées et composition /Dérivée de la réciproque.

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$ $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

17.9 Dérivées de fonctions particulières.

$(x)' = 1$ $(k)' = 0$

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $x>0$ $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ $f(x) > 0$

$(x^n)' = n\,x^{n-1}$ $n \in R_0$ $x \neq 0$ $(f^n)'(x) = n\,(f(x))^{n-1} f'(x)$ $n \in R_0$ $f(x) \neq 0$

$(\sin x)' = \cos x$ $(\sin f(x))' = f'(x).\cos f(x)$

$(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad$ $(\cos f(x))' = -f'(x).\sin f(x)$

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad$ $(\tan f(x))' = f'(x).(1 + \tan^2 f(x)) = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$

$(\cot x)' = -1 - \cot^2 x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$ $\qquad$ $(\cot f(x))' = -f'(x).(1 + \cot^2 f(x)) = \dfrac{-f'(x)}{\sin^2 f(x)}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ (-1 < x < 1)$ $\qquad$ $(\arcsin f(x))' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - (f(x))^2}}\ (-1 < f(x) < 1)$

$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}\ (-1 < x < 1)$ $\qquad$ $(\arccos f(x))' = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1 - (f(x))^2}}\ (-1 < f(x) < 1)$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $(\arctan f(x))' = \dfrac{f'(x)}{1 + (f(x))^2}$

$(\text{arccot}\ x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $(\text{arccot}\ f(x))' = -\dfrac{f'(x)}{1 + (f(x))^2}$

$(e^x)' = e^x$ $\qquad$ $(e^{f(x)})' = f'(x)\, e^{f(x)}$

$(a^x)' = a^x \ln a$ $\qquad$ $(a^{f(x)})' = f'(x).a^{f(x)} \ln a$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ $\qquad$ $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\ (f(x) > 0)$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x.\ln a}\ (x > 0)$ $\qquad$ $(\log_a f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x).\ln a}\quad (f(x) > 0)$

N.B. : Les formules de dérivation des fonctions trigonométriques ne sont applicables que lorsque la variable x est exprimée en radians.

18. Primitives

<u>Définition</u> : si $F'(x) = f(x)$ alors $F(x)$ est une primitive de $f(x) \Leftrightarrow F(x)$ est une intégrale indéfinie de $f(x)\,dx$

18.1 Primitives immédiates

$\int 0.dx = C$ $\qquad\qquad$ $\int a\, dx = ax + C$

$\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \forall\, n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C = \ln(C'\,|x|)\ ,\ C' \in \mathbb{R}_0^+$$

$\int e^x\, dx = e^x + C$ $\qquad\qquad$ $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$ $\qquad\qquad$ $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + C = \int (1 + \tan^2 x)\, dx$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x + C = \int (1 + \cot^2 x)\, dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \arctan x + C = -\text{arcot}\, x + C'$$

18.2 Méthodes de calcul.

<u>1. Par décomposition:</u>

$\int (m\, f(x) + p\, g(x))\, dx = m\int f(x)\, dx + p\int g(x)\, dx \quad$ où $m, p \in \mathbb{R}$

<u>2. Par substitution (changement de variable)</u>

$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))\, g'(t)\, dt \qquad$ où $t = g^{\leftarrow}(x)$

<u>3. Par parties.</u>

$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$

4. <u>Par décomposition en sommes de fractions rationnelles simples.</u>

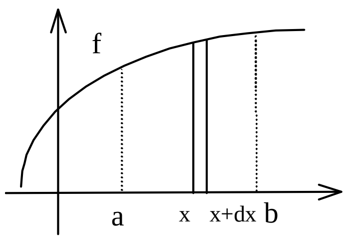
19. Intégrales définies.

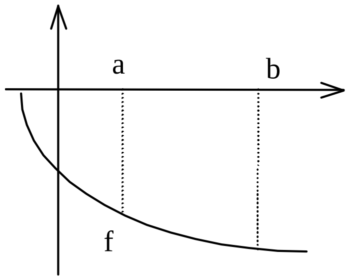
<u>Définition</u> :

$\int_a^b f(x)\,dx$ est appelée intégrale définie de la fonction f entre les bornes a et b.

Nous avons : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ où F(x) est une primitive de f(x)

19.1 Calcul d'aires par les intégrales définies





La surface ci-contre limitée par l'axe des x, le graphe de la fonction f et les droites d'équation x = a et x = b peut être calculée par intégration.

Si f continue sur [a , b]

F une primitive de f (c.-à-d. $F'(x) = f(x)$)

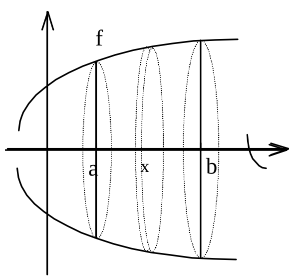
dA = élément d'aire = f(x) dx alors :

$A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

mais si $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

alors $A = - \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b)$

19.2 Calcul de volumes de révolution par les intégrales définies.

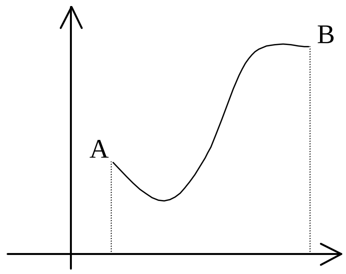


Le volume engendré par la rotation autour de l'axe des x d'une surface limitée par l'axe des x, le graphe de f et les droites d'équation x = a et y = b vaut :

$V = \int_a^b dV$ où $dV = \pi f^2(x)\,dx$: élément de volume

$\Rightarrow V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$

19.3 Calcul de la longueur d'un arc.



La longueur d'une courbe d'équation y = f(x) peut être obtenue par :

$$L(\text{courbe AB}) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

19.4 Travail d'une force.

Une force varie de façon continue le long d'une droite. Soit x la distance du point d'application de la force à un point fixe de la droite, pris comme origine. La force au point x est donnée par la fonction F(x). Le travail effectué, lorsque le point d'application de cette force se déplace de x = a à x = b, est obtenu par : $w = \int_a^b F(x)\,dx$

20. Exponentielles et logarithmes

(On trouvera les graphes de ces fonctions au paragraphe 21)

$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \exp_a(x) = a^x$ (fonction exponentielle de base a : a > 0 et a ≠1)

$\log_a : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \to \log_a(x)$ (fonction logarithmique de base a : a > 0 et a ≠1)

$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$: les fonctions $\log_a$ et $\exp_a$ a sont réciproques l'une de l'autre.

<u>Les fonctions népériennes</u>

$$e = \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$$

$\exp_e(x) = e^x$ est la fonction exponentielle népérienne

$\log_e(x) = \ln(x)$ est la fonction logarithme népérien

Propriétés des logarithmes. $\forall\, a, b \in R_0^+ \;\; a, b \neq 1$ $\forall\, x, y \in R_0^+$:

1. $\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$

2. $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$

3. $\log_a \frac{1}{x} = - \log_a x = \mathrm{colog}_a\, x$ (cologarithme de x de base a)

4. $\log_a x^n = n \log_a x$

5. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ Cas particulier : $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

21. Analyse combinatoire

1. Arrangements simples :

$$A_m^p = m\,(m - 1) \ldots (m - p + 2)\,.\,(m - p + 1) = \frac{m!}{(m - p)!}\,,\; p \leq m$$

2. Arrangements avec répétitions : $\overline{A}_m^p = m^P$

3. Permutations simples : $P_m = m!$

4. Permutations avec répétitions : $\overline{P}_m^{r_1, r_2, \ldots r_n}\ \frac{m!}{r_1!\, r_2! \ldots r_n!}$ avec $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = m$

5. Combinaisons simples : $C_m^p = \frac{m!}{p!\,(m - p)!} = \frac{A_m^p}{p!}\,,\; p \leq m$

6. Combinaisons avec répétitions : $\overline{C}_m^p = C_{m+p-1}^p$

Propriétés des combinaisons :

a) $C_m^p = C_m^{m-p}$

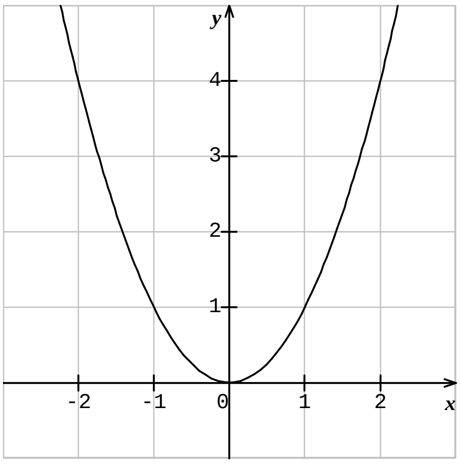
b) $C_{m+1}^{p+1} = C_m^p + C_m^{p+1}$

22. Binôme de Newton

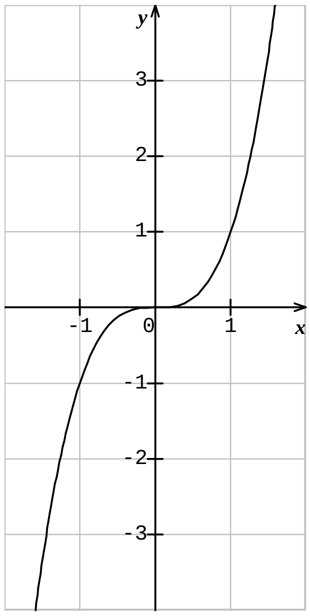
$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, x^{n-i}\, y^i$$

23. Graphes de quelques fonctions usuelles

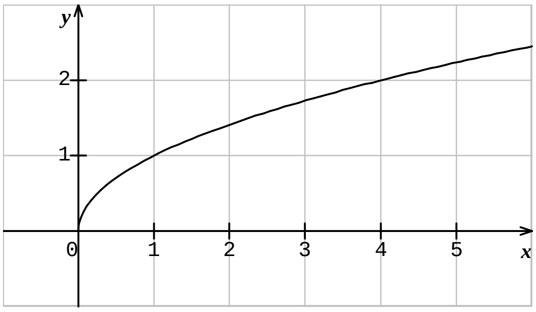
1. f : R → R : x → f(x) = x^2



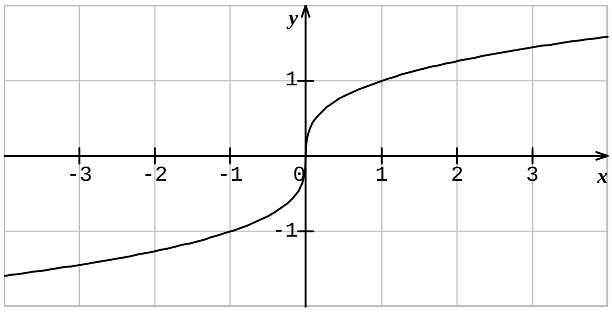
2. f : R → R : x → f(x) = x^3



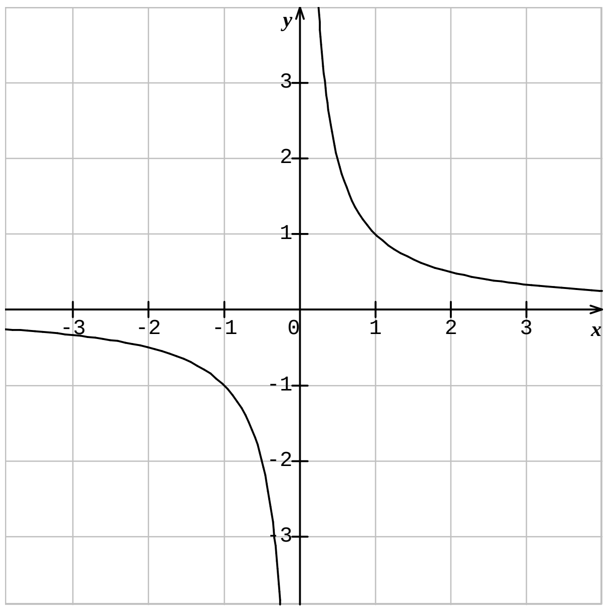
3. f : R^+ → R : x → f(x) = $\sqrt{x}$



4. *f : R → R : x → f(x) = $\sqrt[3]{x}$*



5. f : R_0 → R : x → f(x) = $\frac{1}{x}$



f(x) = $\frac{1}{x}$ est décroissante dans R_0^- et dans R_0^+

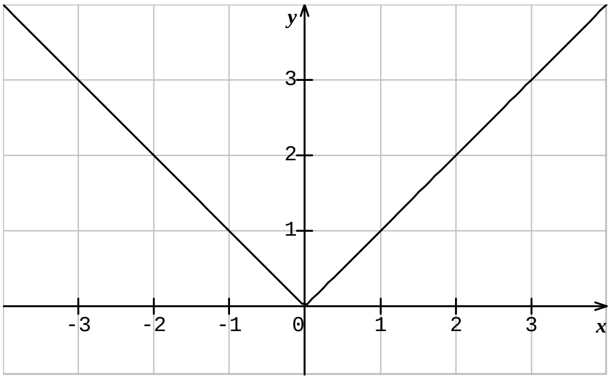
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

la droite d ≡ x = 0 est asymptote verticale

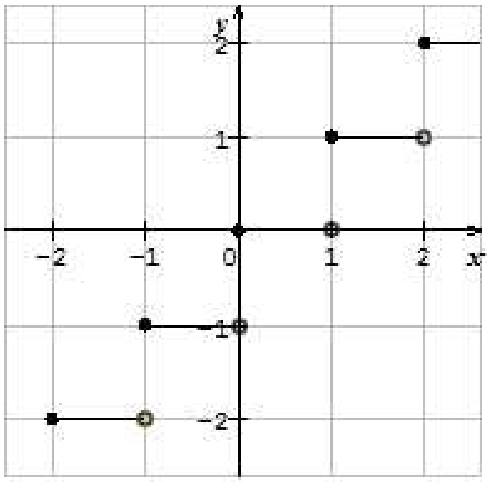
la droite d ≡ y = 0 est asymptote horizontale

6. <u>f : R →R : x → f(x) =|x|</u>



f(x) = | x | est une fonction non dérivable en x = 0

7. <u>f : R → Z : x → E(x)</u>
La fonction partie entière de x



Par définition, E(x) est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

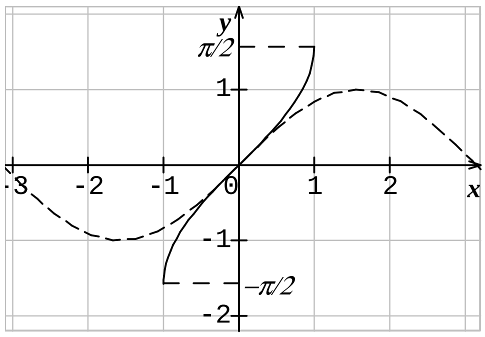
8. <u>f :</u> <u>R →R : x → f(x) = sin x</u> (en pointillés)

9. <u>g : [-1, 1] →R : x → g(x) = arcsin x</u>: (en trait plein)

La fonction sinus est périodique de période 2π

Ses racines : x = kπ , k ∈ Z

Elle est impaire (symétrie centrale du graphe par rapport à l'origine.)



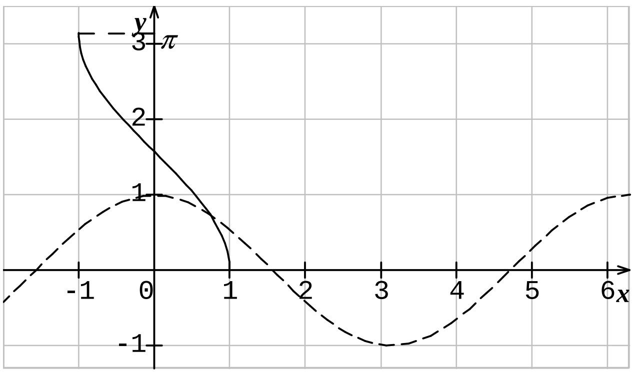
10. <u>f : R →R : x → f(x) = cos x</u> (en pointillés)

11. <u>g : [-1, 1] →R : x → g(x) = arccos x</u>: (en trait plein)

La fonction cosinus est périodique de période 2π.

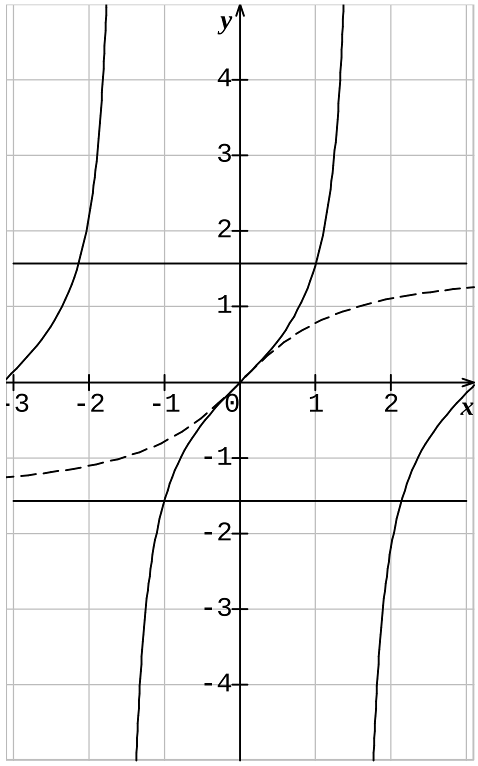
Ses racines : x = $\frac{\pi}{2}$+ kπ , k ∈ Z

Elle est paire (graphe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.)



12. f : R\ {$\frac{\pi}{2}$+ kπ}→R : x → f(x) = tan x (en trait plein)

13. g : R →R : x → f(x) = arctan x (en pointillés)



La fonction tangente est une fonction périodique de période π

Ses racines : x = kπ , k ∈ Z

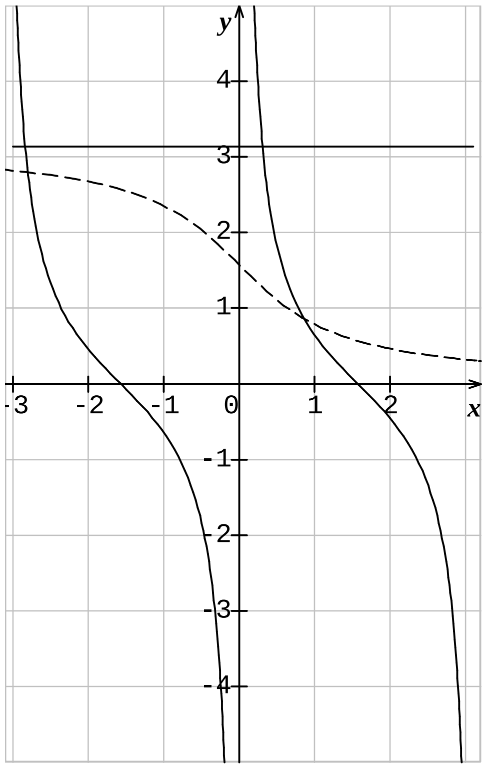
Elle est impaire : (Symétrie centrale du graphe par rapport à l'origine.)

Les droites x = $\frac{\pi}{2}$+ kπ sont des asymptotes verticales du graphe.

La fonction arctan a pour asymptotes horizontales les droites y = $\frac{\pi}{2}$ et y = - $\frac{\pi}{2}$

14. f : R\ { kπ} →R : x → f(x) = cot x (en trait plein)

15. g : R → R : x → g(x) = arccot x (en pointillés)



La fonction cotangente est une fonction périodique de période π

Ses racines : x = $\frac{\pi}{2}$+ kπ , k ∈ Z

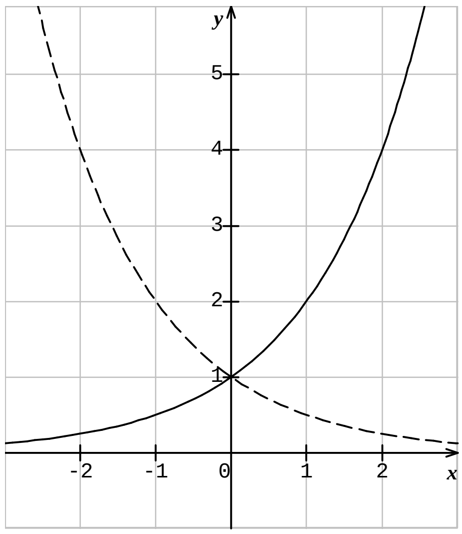
Elle est impaire : (Symétrie centrale du graphe par rapport à l'origine.)

Les droites x = kπ, k ∈ Z sont des asymptotes verticales du graphe.

La fonction arccot a pour asymptotes horizontales les droites y = 0 et y = π

16. *f : R → R : x → f(x) = a^x (a > 1) :) : (en trait plein)*

17. *g : R → R : x → g(x) = a^x (0<a<1) : (en pointillés)*



Exemple : f(x) = 2^{x} (en trait plein)

et g(x) = 0.5^{x} (en pointillés)

Pour a>1 : Fonction strictement positive croissante

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

y = 0 est asymptote horizontale à gauche

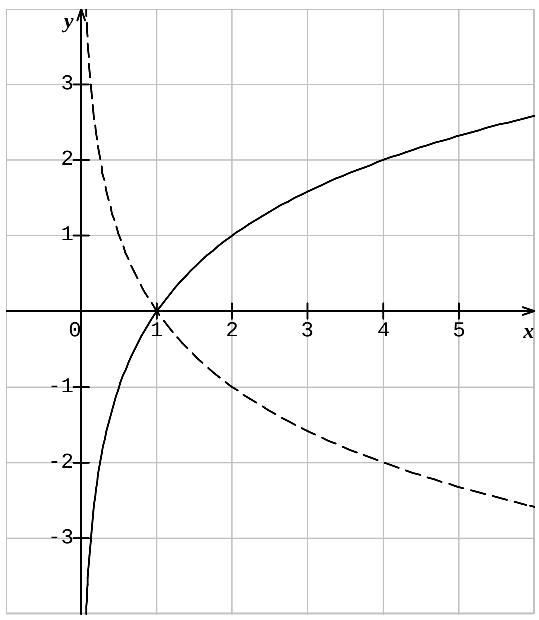
Pour 0<a<1 : Fonction strictement positive décroissante

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$

y = 0 est asymptote horizontale à droite

18. *f : R_0^+ → R : x → f(x) = $\log_a x$ (a > 1) : (en trait plein)*

19. *g : R_0^+ → R : x → g(x) = $\log_a x$ (0<a<1) : (en pointillés)*



Exemple : f(x) = $\log_2$ (x) : en trait plein

et g(x) = $\log_{0.5}$ (x) (en pointillés)

$\log_a 1 = 0$ $\qquad$ $\log_a a = 1$

Pour 0<a<1 : Fonction décroissante

$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$

x = 0 est asymptote verticale

Pour a>1 : Fonction croissante

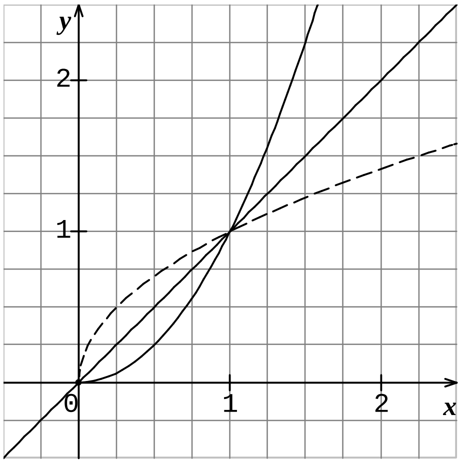
$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$

x = 0 est asymptote verticale

24. Graphes associés

Dans tous les graphes présentés, g(x) est en pointillés et f(x) en trait plein

a) <u>g(x) = f$^{\leftarrow}$ (x) (ou f $^{-1}$ (x)) (fonctions réciproques)</u>

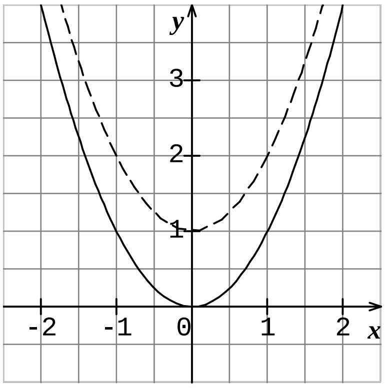


Un point (x, y) du graphe de f devient le point (y, x) du graphe de g

<u>Exemple</u> : f(x) = x^2 et g(x) = $\sqrt{x}$

Dans un repère orthonormé, les graphes de ces fonctions sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation y = x

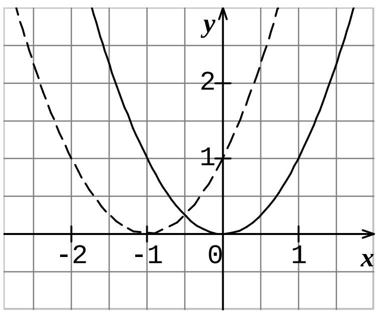
b) <u>g(x) = f(x) + k</u>



Un point (x, y) du graphe de f devient le point (x, y + k) du graphe de g

<u>Exemple</u> : f(x) = x^2 et g(x) = x^2 + 1

c<u>) g(x)= f(x + k)</u>



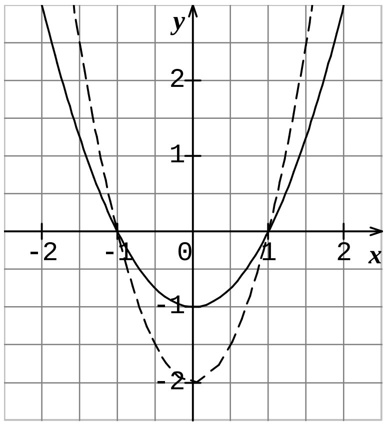
Un point (x, y) du graphe de f devient le point (x - k, y) du graphe de g

<u>Exemple</u> : f(x) = x^2 et g(x) = $(x + 1)^2$

d) g(x) = k.f(x)

un point (x, y) du graphe de f devient le point (x, ky) du graphe de g

Le graphe de g(x) = k.f(x) a les mêmes racines que celui de f(x).

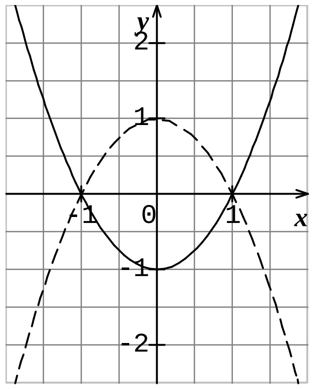


Exemple :

$f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = 2(x^2 - 1)$

e) g(x) = - f(x)

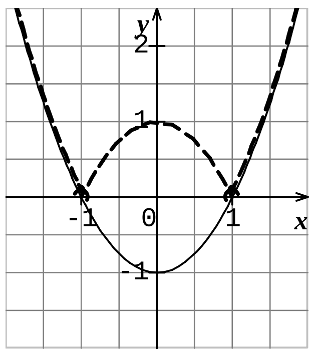
Un point (x, y) du graphe de f devient le point (x, - y) du graphe de g



Exemple : $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = - x^2 + 1$

f) g(x) = $|f(x)|$

Un point (x, y) du graphe de f devient le point (x, |y|)du graphe de g.



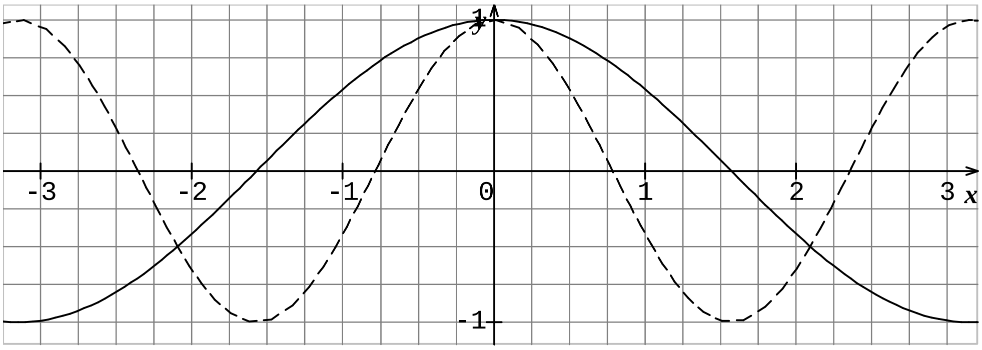
Exemple : $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = |x^2 - 1|$

g) <u>g(x) = f(k.x)</u>

Un point (x, y) du graphe de f devient le point ($\frac{x}{k}$, y) du graphe de g

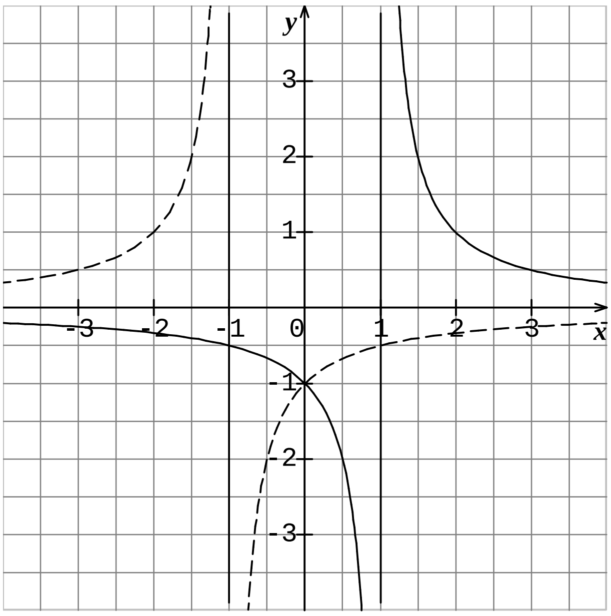
Le point du graphe de f appartenant à l'axe des y appartient également au graphe de g.

<u>*Exemple*</u> : cos x et g(x) = cos 2x



h) <u>g(x) = f(-x)</u>

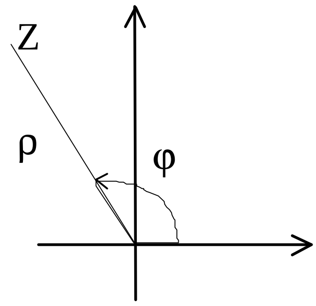
<u>*Exemple*</u> : f(x) = $\frac{1}{x - 1}$ et g(x) = $\frac{1}{- x - 1}$



Un point (x, y) du graphe de f devient le point (-x, y) du graphe de g.

Les graphes de ces fonctions sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées. (et donc ils coupent cet axe en un même point)

25. Les nombres complexes.



z = a + bi : a est la partie réelle et b la partie imaginaire

$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$

$(a + bi) . (a' + b'i) = (aa' - bb') + i (ab' + a'b)$

Plan complexe ou plan de Gauss :

A tout nombre complexe z = a + ib on associe un point Z de coordonnée (a, b) appelé point-image du nombre complexe z = a + ib.

Le nombre complexe z = a + ib est l'affixe du point Z(a, b).

L'axe Ox est appelé axe réel et l'axe Oy, l'axe imaginaire.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

L'angle φ, formé par la partie positive de l'axe réel et le segment qui joint l'origine au point Z est l'*argument* de z. La longueur du segment qui joint l'origine au point Z est le *module* de z et est souvent noté |z|.

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \\ \tan \varphi = \frac{b}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \rho \cos \varphi \\ b = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

Opérations sur les nombres complexes mis sous forme trigonométrique:

$\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho \text{ cis } \varphi$ et $\rho' (\cos \varphi' + i \sin \varphi') = \rho' \text{ cis } \varphi'$

Le produit de deux nombres complexes non nuls est un nombre complexe dont

- le module est le produit des modules des facteurs
- l'argument est la somme des arguments des facteurs.

c. à d. : $\rho \text{ cis } \varphi \, . \, \rho' \text{ cis } \varphi' = \rho \rho' \text{ cis } (\varphi + \varphi')$

L'inverse d'un nombre complexe non nul z est un nombre complexe dont

- le module est l'inverse du module de z
- l'argument est l'opposé de l'argument de z c. à d. $\dfrac{1}{\rho \text{ cis } \varphi} = \dfrac{1}{\rho} \text{ cis } (-\varphi)$

Le quotient de deux nombres complexes non nuls est un nombre complexe dont

- le module est le quotient du module du premier par le module du second
- l'argument est la différence entre l'argument du premier et l'argument du second.

c. à d. : $\dfrac{\rho \text{ cis } \varphi}{\rho' \text{ cis } \varphi'} = \dfrac{\rho}{\rho'} \text{ cis}(\varphi - \varphi')$

Formule de Moivre : $(\text{cis } \varphi)^n = \text{cis } n\varphi \; (n \in \mathbb{Z})$

Extensions de la formule de Moivre: $(\cos \varphi - i \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)$

26. Statistiques

26.1 Statistiques à une variable

<u>L'effectif total</u> : $n = \sum_{i=1}^{p} r_i$ (r_i = répétitions)

<u>La moyenne</u> : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} r_i x_i$

<u>L'écart moyen</u> est la moyenne des valeurs absolues des écarts à la moyenne :

$$E_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} r_i\,|x_i - \bar{x}| = \overline{|x_i - \bar{x}|}$$

<u>La variance</u> est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} r_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} r_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

<u>l'écart type</u> est la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{V}$

26.2 Statistiques à 2 variables

Soit n points de coordonnées (x_i, y_i) : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

V_x , σ_x , V_y et σ_y sont calculés comme dans le point 1.1

$$cov_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\,.\,\bar{y} = \overline{xy} - \bar{x}.\bar{y}$$

La droite de régression de y en x ∋ le point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$

$$d_x \equiv y - \bar{y} = a\,(x - \bar{x}) \qquad \text{et } a = \frac{cov_{x\,y}}{\sigma_x^2}$$

La droite de régression de x en y ∋ le point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$

$$d_y \equiv y - \bar{y} = a'\,(x - \bar{x}) \qquad \text{et } a' = \frac{\sigma_y^2}{cov_{x\,y}}$$

Le coefficient de corrélation linéaire $r = \frac{cov_{x\,y}}{\sigma_x \sigma_y}$ (et $r^2 = \frac{a}{a'}$) $|r| \leq 1$

27. Variables aléatoires - lois de probabilité

27.1 Variables aléatoires discrètes :

Une variable aléatoire liée à une épreuve aléatoire est une application de la catégorie d'épreuve de cette expérience aléatoire dans R : $X : \Omega \rightarrow R$

La fonction définie par $f(x_i) = P(X = x_i)$ est la distribution ou loi de probabilité de X

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction :

$$F : R \rightarrow R : x \rightarrow F(a) = P(X \leq a) \qquad \text{Et donc } F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Si on note $P(X = x_k) = p_k$

La moyenne ou espérance mathématique : $E(X) = \mu_x = \sum_k p_k x_k$

La variance : $V_x = \sigma_x^2 = \sum_k p_k(x_k - \mu_x)^2 = \sum_k p_k x_k^2 - \mu_x^2$ L'écart-type $\sigma_x = \sqrt{V_x}$

27.1.1 Distribution binomiale : Bi (n, p)

(Répétition de n épreuves à deux issues ou épreuves de Bernouilli)

Bi (n, p) : (p = P(succès) et q = 1 - p = P(échec))

$P(X = k) = p_k = C_n^k \, p^k q^{n-k}$

$\mu_x = np$ $\quad \sigma_x^2 = npq$ $\quad$ et donc : $\sigma_x = \sqrt{npq}$

27.1.2 La loi de Poisson : Po (μ)

$p_k = P(X = k) = \dfrac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}$ $\qquad \mu_x = \mu$ $\qquad \sigma_x = \mu$

27.2 Variables aléatoires continues

- $\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$
- $\sigma_x^2 = Var(X) = E[(X - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x)\, dx$
- $P(-\infty < X < \infty) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ (événement certain)
- $P(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$

27.2.1 La loi normale N(μ, σ)

Loi : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$ Moyenne = μ Ecart-type = σ

27.2.2 La normale réduite N(0, 1)

Loi : $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]$ Moyenne = 0 Ecart-type = 1

27.2.3 Probabilité selon une loi normale

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \varphi(z)\,dz = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

27.3 Liens entre Binomiale, Poisson et Normale

Les distributions de probabilité de Poisson et Binomiale tendent vers une courbe en cloche dans certaines conditions. On résume ces conditions par le schéma suivant :

<u>*v.a. binomiale*</u> : X = Bi (n,p)

(q = 1 - p)

$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

$\mu_x = np$ $\sigma_x = npq$

$n \to \infty$, $p \to 0$, $np = \mu$ — $n > 50$, $np < 5$

$n \to \infty$, $p \cong 0.5$ — $n \ge 50$, $np > 5$, $nq > 5$, $p \cong 0.5$

$\mu = np$ $\sigma^2 = npq$

<u>*v.a. de Poisson*</u> : X = Po(μ)

$P(X = k) = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}$

$\mu_x = \mu$ $\sigma_x = \mu$

$\mu > 20$

<u>*v.a. normale*</u> : X = N (μ, σ^2)

$$P(a \le X \le b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$\mu_x = \mu$ $\sigma_x = \sigma$

Les conditions théoriques telles que $n \to \infty$ (à gauche des flèches) sont remplacées par des conditions pratiques telles que $n > 50$ par les statisticiens.

28. Quelques symboles mathématiques et leur signification.

$a \in E$	l'élément a appartient à l'ensemble E
$a \notin E$	L'élément a n'appartient pas à l'ensemble E
$E \ni a$	L'ensemble E comprend l'élément a
$A \cap B$	A inter B : ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B
$A \cup B$	A union B : ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B
$A \subset B$	L'ensemble A est inclus dans l'ensemble B
$A \supset B$	L'ensemble A contient l'ensemble B
$A \backslash B$	A moins b : ensemble des éléments de l'ensemble A qui n'appartiennent pas à l'ensemble B
$\varnothing$	$\varnothing$ désigne l'ensemble vide. Celui-ci ne comprend aucun élément.
#A	Cardinal A désigne le nombre d'éléments de l'ensemble A
$P \Rightarrow Q$	La proposition P implique la proposition Q
$P \Leftrightarrow Q$	La proposition P est équivalente à la proposition Q
$\exists\, a \in E : P$	Il existe un élément a de l'ensemble E qui vérifie la proposition P ($\Leftrightarrow$ au moins un élément a de E vérifie la proposition P)
$\forall\, a \in E : P$	Tout élément de l'ensemble E vérifie la propriété P

Index

C.N.D.P. Erpent – septembre 2011

Réalisé par Fr. Borlon-Vangénéberg

Avec la participation de P. de Baenst, A.-M. Genevrois et J.-P. Gosselin

http://www.borlon.net/maths/