XV. Probabilités.

1. Introduction

L'étude des probabilités couvre toutes les situations de phénomènes ayant plusieurs issues possibles, la réalisation de chaque résultat étant due au hasard.
Des exemples de calcul de probabilités sont nombreux : en voici quelques uns.

1. Le lancer du dé : quelles sont mes chances d'obtenir un 6 ?
2. Au jeu de pile ou face, combien de chances ai-je d'obtenir 2 faces si je lance 3 fois la pièce ?
3. Lorsque je lance une punaise sur un sol lisse, celle-ci peut retomber de 2 manières possibles : pointe en l'air, ou appuyée sur sa pointe. Quelles sont "les chances" qu'elle retombe "pointe en l'air" ?

Dans le cas du premier exemple, l'intuition nous fait répondre $\frac{1}{6}$

Pour le second exemple, le dénombrement de toutes les issues possibles (un schéma en arbre peut nous y aider), nous permet assez vite également d'arriver à la valeur $\frac{3}{8}$

Dans le 3$^{\text{ème}}$ exemple, nous arrivons difficilement à donner une valeur qui réponde à la question. Le seul moyen d'y arriver est de réaliser un grand nombre de fois l'expérience et d'observer la fréquence du résultat "pointe en l'air". On considère alors que lors de la prochaine expérience semblable, la probabilité d'obtenir "pointe en l'air" (une sorte de mesure des chances d'avoir ce résultat) est égale à cette fréquence.
Nous allons maintenant préciser le vocabulaire employé pour décrire ces situations.

2. Quelques définitions.

2.1 Expérience aléatoire.

Une expérience aléatoire est une expérience qui a plusieurs résultats possibles mais dont l'issue ne peut être prévue avec certitude. Le résultat est dû au hasard. On peut cependant décrire tous les résultats possibles.
Dans la suite du cours, on notera : E.A.

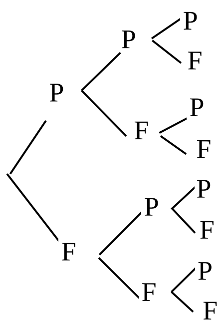
2.2 Catégorie d'épreuve.

La catégorie d'épreuve (ou ensemble fondamental) d'une E.A. est l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience. On la note C.E. Cet ensemble est appelé Ω

Exemples :

- Le lancer du dé est une expérience aléatoire . Sa catégorie d'épreuve : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Le lancer d'une pièce de monnaie . $\Omega = \{P, F\}$
- La naissance d'un enfant Ω = {Fille, Garçon}
- Le lancer de 3 pièces de monnaie
  $\Omega = \{(P, P, P) , (P, P, F) , (P, F, P) , (P, F, F) , (F, P, P) , (F, P, F) , (F, F, P) , (F, F, F) \}$

  On peut représenter cette situation par un diagramme en arbre



- On lance un dé jusqu'à ce qu'on aie un 6 sur la face supérieure. On note le nombre de jets ainsi réalisés.
  $\Omega = N$
- On lance une fléchette sur une cible ronde (sans marque). On note la distance au centre.
  $\Omega = [0, R]$: un ensemble infini de points.

Dans ce chapitre, nous n'aborderons que les cas où la catégorie d'épreuve est un ensemble fini.

2.3 Evénement.

2.3.1 Exemple :

Considérons l'expérience aléatoire "le lancer du dé " $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Dans le cadre de cette expérience, on peut s'intéresser à différents "événements"
E_1 : l'événement : "Le résultat est pair " : $E_1 = \{2, 4, 6\}$ et $E_1 \subset \Omega$
E_2 : l'événement : "Le résultat est supérieur ou égal à 3 " : $E_2 = \{3, 4, 5, 6\}$ et $E_2 \subset \Omega$
E_3 : l'événement : "Le résultat est divisible par 3" : $E_3= \{3, 6\}$ et $E_3 \subset \Omega$

2.3.2 Définition

Un événement E d'une expérience aléatoire est un sous-ensemble de Ω : $E \subset \Omega$
Pour le caractériser, on exprime une condition qui le détermine (pour le cas de E_1 : "le résultat est pair") ou on énumère ses éléments ($E_1 = \{2, 4, 6\}$)
Un événement est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à ce sous-ensemble $E \subset \Omega$

2.3.3 Remarques :

- Certains événements sont particuliers : ce sont les événements Ω et $\varnothing$.

Si $E = \Omega$: E est l'événement certain. Il est réalisé quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire.
Si $E = \varnothing$: E est l'événement impossible : il n'est jamais réalisé.
Dans le cas du lancer du dé : E = l'événement : " le résultat est positif" est un événement certain.
E = l'événement : "le résultat est divisible par 7" est un événement impossible.

- Un événement élémentaire est un événement qui comporte un seul élément.

2.3.4 Opérations sur les événements.

Si nous considérons maintenant 2 événements : A et B , alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $\Omega \backslash A$ sont également des événements.
L'événement $A \cup B$ (A union B) est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à l'union des ensembles A et B c'est à dire s'il appartient à A ou à B
L'événement $A \cap B$ (A inter B) est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à l'intersection des ensembles A et à B c'est à dire s'il appartient à A et à B
L'événement $A \backslash B$ (A moins B) est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à la différence des ensembles A et B c'est à dire s'il appartient à A mais n'appartient pas à B
L'événement $\Omega \backslash A = A^c$ (Ω moins A ou A complémentaire) est réalisé ssi A n'est pas réalisé.
Les événements A et A^c sont appelés événements contraires ou aussi événements complémentaires.

<u>Exemples</u>
On lance un dé et on observe sa face supérieure. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
A = Le résultat obtenu est pair $A = \{2, 4, 6\}$
B = Le résultat obtenu est supérieur ou égal à 3 $B = \{3, 4, 5, 6\}$
$A \cup B$ = le résultat obtenu est pair ou supérieur ou égal à 3 $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
$A \cap B$ = le résultat obtenu est pair et supérieur ou égal à 3 $A \cap B = \{4, 6\}$
$A \backslash B$ = Le résultat obtenu est pair mais n'est pas supérieur ou égal à 3 $A \backslash B = \{2\}$
A^c = le résultat est impair $A^c = \{1, 3, 5\}$

<u>Remarque.</u>

- Deux événements sont *contraires* ssi la réalisation de l'un équivaut à la non réalisation de l'autre.
  (c'est à dire : A est réalisé $\Leftrightarrow$ A^c n'est pas réalisé et A^c est réalisé $\Leftrightarrow$ A n'est pas réalisé)
  2 événements contraires sont tels que $A \cup A^c = \Omega$
- Deux événements sont *incompatibles* ssi la réalisation de l'un exclut la réalisation de l'autre.
  (c'est à dire : A est réalisé $\Rightarrow$ B n'est pas réalisé et B est réalisé $\Rightarrow$ A n'est pas réalisé)
  Les ensembles A et B sont alors disjoints.
- Conséquence : 2 événements contraires sont incompatibles, mais 2 événements incompatibles ne sont pas nécessairement contraires.

Exemple.
On lance une pièce de monnaie 3 fois de suite
$\Omega = \{(P, P, P) , (P, P, F) , (P, F, P) , (P, F, F) , (F, P, P) , (F, P, F) , (F, F, P) , (F, F, F) \}$
Considérons les événements A : Le nombre de F est strictement supérieur au nombre de P
B : Le nombre de F est strictement inférieur au nombre de P
C : Il y a exactement une F
$A = \{(F, F, F) , (F, F, P) , (F, P, F) , (P, F, F)\}$
$B = \{(P, P, P) , (P, P, F) , (P, F, P) , (F, P, P)\}$
$C = \{P, P, F) , (P, F, P) , (F, P, P)\}$
Les événements A et B sont contraires. $A^c = B$
Les événements A et C sont incompatibles.

3. Probabilité.

3.1 Notion de fréquence-limite

Lors d'une expérience aléatoire dont la catégorie d'épreuve est Ω, on s'intéresse à l'événement $A \subset \Omega$
(Exemple : on lance un dé et on observe le point. A est l'événement "le résultat est strictement supérieur à 4")
Soit n, le nombre de fois où on réalise l'expérience et n_A , le nombre de fois où A s'est produit.

Le quotient $\frac{n_A}{n}$ est la fréquence relative de A

Postulat : si on répète l'expérience indéfiniment, alors la fréquence relative d'un événement lié à cette expérience tend vers une limite qu'on appelle fréquence–limite. : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} = p$

(dans notre exemple, la fréquence-limite vaudrait 1/3)
Observations :

- $A \subset \Omega : 0 \le n_A \le n \Rightarrow 0 \le \frac{n_A}{n} \le 1$: la fréquence-limite est toujours comprise entre 0 et 1
- $A = \varnothing \Rightarrow n_A = 0 \Rightarrow \frac{n_A}{n} = 0$: la fréquence-limite d'un événement impossible est nulle
- $A = \Omega \Rightarrow n_A = n \Rightarrow \frac{n_A}{n} = 1$: la fréquence-limite d'un événement certain vaut 1
- La probabilité d'un événement correspond habituellement à la fréquence-limite de celui-ci.

3.2 Probabilité : définition

3.2.1 Probabilité d'un événement simple

Soit $\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 \ldots\ldots \omega_n \}$ l'ensemble fondamental d'une expérience aléatoire.
et $U = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}\ldots\ldots\{\omega_n\}\}$: l'ensemble des événements élémentaires liés à Ω
Une probabilité définie sur U est une fonction $P : U \to R$ telle que :
a) $\forall\ i \in \{1, 2, \ldots n\} : P(\{\omega_i\}) \ge 0$
b) $P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \ldots P(\{\omega_n\}) = 1$

Exemple
On lance une pièce de monnaie.
$\Omega = \{P, F\}$
Les événements élémentaires de cette E. A. sont : $\{\omega_1\}=\{P\}$, et $\{\omega_2\}=\{F\}$
Habituellement, on définit : $P(\{P\}) = 0.5$ et $P(\{F\}) = 0.5$ qui correspond aux fréquences observées des résultats.
Remarquons que les propriétés a) et b) sont ainsi vérifiées.
Mais la définition : $P(\{P\}) = 0.4$ et $P(\{F\} = 0.6$ est également conforme aux propriétés et peut être aussi une probabilité sur l'ensemble des événements élémentaires $=\{\{P\} , \{F\}\}$ Cette nouvelle probabilité correspondrait par exemple à une pièce déséquilibrée.
Généralement, les $P(\{\omega_i\})$ sont les fréquences-limites des événements $\{\omega_i\}$

3.2.2 Probabilité d'un événement aléatoire quelconque

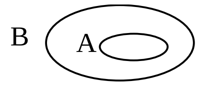
Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots\ldots\omega_n\}$ l'ensemble fondamental d'une expérience aléatoire.
et une probabilité définie sur l'ensemble des événements simples $\{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}\ldots\ldots\{\omega_n\}\}$ et $A \subset \Omega$

On appelle probabilité, la fonction P : $\mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R} : A \to P(A)$ prolongement de la fonction de probabilité définie sur l'ensemble des événements élémentaires telle que :
a) si $A = \varnothing \Rightarrow P(A) = 0$
b) si $A = \{\omega_i\} \Rightarrow P(A) = P(\{\omega_i\})$ comme défini ci-dessus
c) si A n'est ni impossible ni simple $\Rightarrow P(A) = \sum_i P(\{\omega_i\})\ \ \forall\, i : \omega_i \in A$

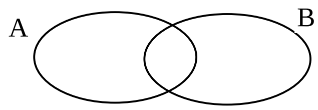
3.3 Propriétés

1. $P(\varnothing) = 0$

2. $A \subset B \Rightarrow P(B\backslash A) = P(B) - P(A)$



3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   Cas particulier : si A et B sont disjoints (c. à d. si $A \cap B = \varnothing$) :
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



4. $P(A^c) = 1 - P(A)$
   En effet, $\Omega = A \cup A^c \Rightarrow P(\Omega) = P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c)$
   $\Rightarrow 1 = P(A) + P(A^c)$ (car $A \cap A^c = \varnothing$)

5. Soient $A_1, A_2, A_3, \ldots..A_n$: n événements disjoints 2 à 2 (c-à-d tels que l'intersection de deux quelconques d'entre eux est vide : $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $A_1 \cap A_3 = \varnothing$ ......)
   $A_1, A_2, A_3, \ldots..A_n \subset \Omega$ $\qquad \forall\, i, j \in \{1,\ldots.n\} : A_i \cap A_j = \varnothing$
   $\Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots.\cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) \ldots+P(A_n)$
   Cette dernière propriété n'est qu'une généralisation du cas de deux événements disjoints.

3.4 Calcul des probabilités.

Reprenons l'exemple classique du lancer du dé et l'événement A = le résultat est multiple de 3.

Intuitivement nous avons immédiatement : $P(A) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$

En général, si une catégorie d'épreuve $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots w_n\}$
$P(\Omega) = 1 = P(\cup \{w_i\}) = \sum P(\{w_i\})$
Si $A = \{w_1, w_2, \ldots w_p\} \Rightarrow P(A) = P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + \ldots. + P(\{w_p\})$
Le plus souvent, les événements élémentaires ont la même chance de se réaliser.
Dans notre exemple classique du dé : $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) \ldots\ldots= P(\{6\})$
On dit alors que ces événements sont équiprobables.
En général : $1 = P(\Omega) = P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + \quad + P(\{w_n\}= n\, P(\{w_1\})$
et donc $P(\{w_1\}) = P(\{w_2\}) = \quad = P(\{w_n\}) = \dfrac{1}{n}$

et $P(A) = \dfrac{p}{n}$ où p est le nombre de cas favorables à A (nombre d'éléments de A) et n le nombre de cas possibles (nombre d'éléments de Ω)
Et, lorsque les événements élémentaires sont équiprobables, nous avons :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\# A}{\# \Omega}}$$

3.5 Exercices.

1. On tire une carte d'un jeu de 52 cartes. Calculer les probabilités des événements A, B et C
   A : la carte est le roi de trèfle.
   B : la carte est un coeur.
   C : la carte est une image.
2. Douze chevaux prennent part à une course. Un joueur remplit 5 bulletins de tiercé différents au hasard. Quelle est sa probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre ?
3. On jette une pièce de monnaie 4 fois de suite.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir la suite (P, F, F, P)
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois F et deux fois P ?
4. On lance 2 dés différents. Quelle est la probabilité des événements suivants ?
   A : la somme des points obtenus est 6
   B : la somme des points obtenus est < 6
   C : la somme des points obtenus est > 6
5. Un dé non pipé est lancé deux fois de suite. On note la somme des points obtenus aux deux jets. Quelles sont les sommes qui ont :
   a) la plus forte probabilité d'apparaître ?
   b) la plus faible probabilité d'apparaître ?
6. Un dé est pipé de telle sorte que la probabilité d'apparaître pour chacune des faces soit proportionnelle au point marqué sur la face. On lance le dé une fois. Calculer :
   a) la probabilité de chaque épreuve.
   b) la probabilité d'obtenir un point pair.
   c) la probabilité d'obtenir un point impair.
7. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois face dans quatre parties consécutives de "pile ou face" ?
8. On tire successivement et au hasard quatre lettres du mot PROFITABLES. Quelle est la probabilité pour que , dans l'ordre du tirage, ces lettres forment le mot RATE ?
   a) si on replace la lettre choisie après chaque tirage.
   b) si on ne le remet pas.
9. Un joueur possède 4 cartes : l'as et le roi de cœur, l'as et le roi de trèfle. Il les mélange. Quelle est la probabilité pour que la couleur des cartes alterne (rouge et noir) ?
10. On choisit un nombre entier n au hasard parmi les entiers strictement positifs et strictement inférieurs à 10. Quelle est la probabilité que le nombre 5n + 3 soit inférieur ou égal à 14 ?
11. On choisit un nombre entier n au hasard parmi les nombres {5, 6, 7} ainsi qu'un nombre p parmi les nombres {10, 11, 12}. Quelle est la probabilité que le produit n.p soit divisible par 5 ?

4. Probabilités conditionnelles.

4.1 Exemple.

Le tableau suivant donne la répartition des élèves de sixième année d'une école suivant le sexe et l'âge.

Age \ Sexe	Filles	Garçons	Totaux
16	16	20	36
17	12	20	32
18	6	12	18
19	6	6	12
20	0	2	2
Totaux	40	60	100

On choisit au hasard un élève de sixième et on note son sexe et son âge.
Si on sait que la personne choisie est un garçon, quelle est la probabilité pour qu'il ait 18 ans ?
Dans ce problème, appelons A , l'événement : la personne choisie a 18 ans, et B : la personne choisie est un garçon. Alors, nous noterons P(A | B) : probabilité de A sachant que B est réalisé, ou encore P(A) si B
P (A | B) = 12/60
Or, nous constatons : $P(A \cap B) = 12/100$ et $P(B) = 60/100$
Nous avons donc : $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
De même : si la personne choisie a 18 ans, quelle est la probabilité qu'elle soit une fille ?
Aux événements considérés dans le cas précédent, nous ajoutons C : la personne choisie est une fille.
On veut P(C | A) = 6/18
Or : $P(A) = 18/100$ et $P(C \cap A) = 6/100$ et à nouveau : $P(C \mid A) = \dfrac{P(C \cap A)}{P(A)}$
Ce qui nous amène à généraliser cette définition.

4.2 Définition

Si $A, B \subset \Omega$ tels que $P(B) \neq 0$
alors la probabilité de A si B (sous-entendu si B est réalisé) est notée P(A|B)
$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Application.
On lance une paire de dés différenciés et on observe la face supérieure de chaque dé. Calculer la probabilité pour qu’un des dés donne comme résultat 2 sachant que la somme des points obtenus est 6
Considérons les événements qui interviennent.
A : Un dé donne 2 = {(2,1) , (2,2) , (2, 3) , (2, 4) , (2, 5) ,(2,6) , (1,2) , (3, 2) , (4, 2) , (5, 2) , (6, 2)}
B : La somme des points vaut 6 : = {(1,5) , (2, 4) , (3, 3) , (4, 2) (5, 1)}
$A \cap B$ = {(2,4) , (4, 2)}
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}$$

4.3 Exercices.

1. On jette un dé deux fois de suite. Quelle est la probabilité qu'un des points soit 6 sachant que la somme des points est 9.
2. Dans une ville donnée, 40% de la population a les cheveux bruns, 25% a les yeux marrons et 15% a à la fois les cheveux bruns et les yeux marrons.
   On choisit au hasard une personne.
   Si elle a les cheveux bruns, quelle est la probabilité qu’elle ait les yeux marrons?

5. Evénements indépendants.

5.1 Exemple :

Dans un jeu de 52 cartes, on extrait 1 carte.
a) Quelle est la probabilité que cette carte soit un huit ?
b) Quelle est la probabilité que cette carte soit un huit sachant que c'est un cœur ?
c) Quelle est la probabilité que cette carte soit un huit sachant que ce n'est pas une image ?

Considérons les événements
A : la carte est un huit
B : la carte est un cœur
C : la carte n'est pas une image
Nous trouvons aisément :

a) $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

b) $P(A \mid B) = \frac{1}{13}$

c) $P(A \mid C) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

Et nous constatons : $P(A) = P(A \mid B)$: la réalisation de B (ou sa non-réalisation) n'influence pas la probabilité de A. Les événements A et B sont dits indépendants.
Au contraire : $P(A) \neq P(A \mid C)$: ici la réalisation de C change la probabilité de A. Les événements A et C sont dépendants.

Nous arrivons naturellement à la définition suivante :

5.2 Définition.

A et B sont indépendants ssi $P(A \mid B) = P(A)$ c.-à-d. deux événements d'une même catégorie d'épreuve sont indépendants ssi la réalisation de l'un est sans influence sur la probabilité de l'autre.

Conséquence :
on sait que $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et A et B sont indépendants ssi $P(A \mid B) = P(A)$
et nous avons donc : A et B indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$
Remarque.
Ne pas confondre événements disjoints et événements indépendants.
A et B sont disjoints ssi $A \cap B = \varnothing$
A et B sont indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$
Exemple.
On tire une carte au hasard d'un jeu de 52 cartes.
A : la carte tirée est un pique. $P(A) = 13/52$
B : la carte tirée est un roi. $P(B) = 4/52$
$A \cap B \neq \varnothing$: A et B ne sont pas disjoints.
$P(A \cap B) = 1/52$ (probabilité d'avoir le roi de pique)
$P(A) \,.\, P(B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{52}{52^2} = \frac{1}{52}$ Et nous avons bien $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B) \Leftrightarrow$ A et B sont indépendants.

5.3 Exercices.

1. Dans une classe de 23 élèves, 18 suivent le cours de néerlandais et 10 le cours d’anglais, 7 suivent les 2 cours et 2 n’en suivent aucun.
   Quelle est la probabilité qu’un élève suive le cours d’anglais sachant qu’il suit le cours de néerlandais.
   Les événements "suivre le cours de néerlandais" et "suivre le cours d'anglais" sont-ils indépendants ?
2. Dans un jeu de 52 cartes, on tire une carte. Quelle est la probabilité que la carte tirée soit un 8 sachant que cette carte est strictement comprise entre 5 et 10
   Ces événements sont-ils indépendants ?
3. Un couple a deux enfants. Quelle est la probabilité que les 2 soient des filles sachant que la 1ère est une fille ? Ces événements sont-ils indépendants ?
4. Dans un lycée, 25% des élèves échouent en math, 15% en chimie et 10% à la fois en math et en chimie. On choisit un élève au hasard. Les 2 événements suivants sont-ils indépendants ?
   A : l’élève a échoué en math B : l’élève a échoué en chimie.

6. Théorème des probabilités totales.

Le théorème des probabilités totales va nous permettre de résoudre des problèmes tels que celui ci-dessous

Exemple.

Je descends en ville demain avec une probabilité de 1/5 s'il pleut et de 1/2 s'il ne pleut pas. La probabilité qu'il pleuve demain est de 2/3. quelle est la probabilité que je descende en ville demain ?

Soit A_1 , A_2 , ...A_n une partition de Ω

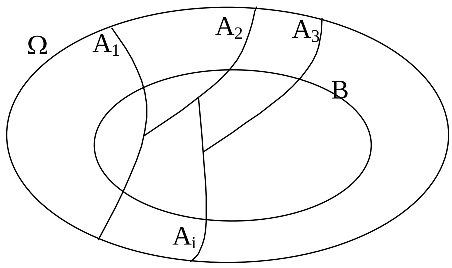
c.-à-d. tels que $\forall$ i, j $\in$ {1,...n} : $A_i \cap A_j = \varnothing$

$A_1 \cup A_2 \cup ......\cup A_n = \Omega$

et $\forall$ i $\in$ {1,...n} $A_i \neq \varnothing$ ($\Rightarrow P(A_i) \neq 0$)

alors $\forall B \subset \Omega$: $P(B) = P(A_1) . P(B \mid A_1) + P(A_2) . P(B \mid A_2) +.......+ P(A_n) . P(B \mid A_n)$

<u>Justification.</u>



$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ....\cup (B \cap A_n)$

Or $(B \cap A_1) \cap (B \cap A_2) = \varnothing$

$(B \cap A_1) \cap (B \cap A_3) = \varnothing$

et de même $\forall$ i, j $\in$ {1,....n} : $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \varnothing$

c.-à-d. tous les $B \cap A_i$ sont disjoints 2 à 2.

Donc $P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ....\cup (B \cap A_n)]$

$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) +....+ P(B \cap A_n)$

$= P(A_1) P(B \mid A_1) + P(A_2) P(B \mid A_2) ......+ P(A_n) P(B \mid An)$

(car en général : $P(A \cap B) = P(A \mid B) . P(B)$)

Reprenons maintenant l'exemple ci-dessus :

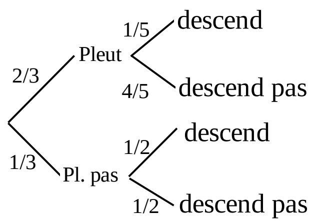
Soit : A_1= il pleut demain A_2 = il ne pleut pas demain B = je descends en ville

$P(B) = P(A_1) P(B \mid A_1) + P(A_2) P(B \mid A_2) = 2/3 . 1/5 + 1/3 . 1/2 = 3/10$.

On peut schématiser cette situation par un diagramme en arbre.

Et nous avons de même :

P(B) = 2/3 . 1/5 + 1/3 . 1/2 = 3/10.



6.1 Exercices.

1. On dispose de 3 urnes. La première contient 3 boules blanches et une noire. La deuxième 2 blanches et 3 noires. Et la troisième 3 blanches et 4 noires. On tire une boule dans une des urnes. Quelle est la probabilité que la boule soit blanche ?
2. Trois machines A, B, et C produisent respectivement 50, 30 et 20% du nombre total de pièces fabriquées dans une usine. Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont de 3, 4 et 5%. Si l'on prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité pour qu'elle soit défectueuse ?
3. Un sac contient des boules de même rayon et de même poids; il y a 3 boules blanches et 5 boules noires. On tire au hasard et successivement deux boules du sac (sans replacer la première boule). Quelle est la probabilité pour que les deux boules tirées soient de la même couleur ?
4. Deux élèves doivent présenter une épreuve en équipe. Le premier connaît parfaitement la matière de 6 chapitres sur 12 et le second connaît celle de 8 chapitres. On pose une question au hasard sur l'un des chapitres. Quelle est la probabilité de réussite de l'équipe ?
5. Les probabilités pour que 3 tireurs atteignent une cible sont respectivement de 1/6, 1/4 et 1/3. Chacun tire une seule fois.

a) quelle est la probabilité que seul un tireur atteigne la cible ?
b) si seulement l'un d'eux atteint la cible, quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse du premier ?

6. Une boîte contient 4 dés normaux et un dé truqué pour lequel 6 apparaît 2 fois sur 3. On choisit un dé au hasard et on le lance. Si le résultat est 6, quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

7. Dans un collège, 4% des garçons et 1% des filles mesurent plus de 1m85. On sait de plus que 60% des élèves sont des filles. On choisit un élève au hasard. Les événements "mesurer plus de 1m95" et "être une fille" sont-ils indépendants ?

7. Exercices généraux : série 1

1. A l'examen, un élève doit tirer 2 fiches dans chacun des 3 paquets contenant 10, 15 et 20 fiches. L'élève ne connaît que 3 questions pour chaque paquet. Quelle est la probabilité
a) qu'il tire 6 fiches qu'il connaît ?
b) qu'il tire au moins une fiche qu'il connaît ?

2. Un bassin comporte 30 poissons. Il y a 5 carpes, 10 brochets, 15 gardons. On pêche 4 poissons d'un seul coup d'épuisette. Quelle est la probabilité
a) d'avoir 4 gardons.
b) qu'au moins un poisson soit une femelle sachant qu'il y a respectivement 2, 4 et 5 femelles dans chaque groupe.

3. a) Déterminer la probabilité pour que 10 individus aient des jours anniversaires différents.
b) Montrer que dans le cas où il y a 23 individus, cette probabilité est proche de 0.5

4. Une urne A renferme 5 billes rouges et 3 blanches
Une urne B renferme 2 billes rouges et 6 blanches.
a) Si l'on tire une bille dans chaque urne, quelle est la probabilité pour qu'elles soient de la même couleur ?
b) Si l'on tire 2 billes dans chaque urne, quelle est la probabilité pour qu'elles soient toutes de la même couleur ?

5. Une boîte A contient 8 pièces détachées dont 3 sont défectueuses. Une boîte B contient 5 pièces détachées dont 2 sont défectueuses. On tire au hasard une pièce dans chaque boîte. Calculez la probabilité pour que
a) aucune pièce ne soit défectueuse.
b) une seule pièce soit défectueuse.

6. Un sac contient 20 jetons numérotés de 1 à 20
a) On tire un jeton. Tous les jetons ayant même probabilité d'être extraits, quelle est la probabilité pour que le nombre tiré :
1° soit impair 2° soit impair et divisible par 3 ?
b) On tire ensemble 2 jetons. Toutes les paires de jetons ayant la même probabilité d'être extraites, calculez la probabilité pour que :
1° la somme des nombres tirés soit 12 2° le produit des nombres tirés soit 12.

7. Un sac contient 7 boules blanches, 5 rouges et 3 vertes. Dans l'épreuve qui consiste à tirer 3 boules simultanément, quelle est la probabilité :
a) de tirer 3 boules de couleurs différentes;
b) de tirer 3 boules dont deux au moins sont rouges
c) de tirer au moins une boule blanche sur les trois ?

8. Vous possédez 10 pièces de monnaie dont trois sont fausses. Vous donnez au hasard deux de ces pièces. Quelle est la probabilité pour que
a) les deux pièces soient bonnes ?
b) une seule soit fausse ?
c) les deux pièces soient fausses ?

9. On jette 5 dés de couleurs différentes et on note la suite des points obtenus. Calculer la probabilité d'avoir :
a) une suites de cinq points différents ?
b) une paire (exactement deux points égaux) ?
c) une double paire ?
d) un brelan (exactement trois points égaux) ?
e) un full (un brelan et une paire) ?

f) un carré (exactement quatre points égaux) ?
g) un poker (cinq points égaux) ?

10. Deux joueurs forment une équipe au jeu de trivial-poursuit. L'un connaît en moyenne deux fois sur 5 la réponse aux questions de la rubrique "Cinéma" et l'autre 1 fois sur 4. Quelle est la probabilité de cette équipe de ne pas trouver la réponse à une question de cette rubrique ?

8. Exercices généraux : série 2

1. Une urne contient 2 boules blanches, une boule noire, 7 boules rouges. On extrait successivement deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir une boule blanche puis une boule noire.
a) en remettant la boule tirée dans l'urne après le premier tirage ?
b) sans la remettre ?

2. Sortant d'un théâtre , trois philosophes reprennent au hasard leurs chapeaux au vestiaire. Quelle est la probabilité que l'un au moins d'entre eux ait son chapeau ?

3. Dix chevaux prennent part à une course. Quelle est la probabilité de pronostiquer
a) un tiercé correct dans l'ordre ?
b) un tiercé correct dans le désordre (ou dans l'ordre) ?

4. Une famille est formée de 2 garçons et 3 filles. Quelle est la probabilité que la succession, par âge, des filles et des garçons soit représentée par la suite (F, G, F, G, F) ?

5. Une famille compte 6 enfants. Quelle est la probabilité qu'il y ait autant de garçons que de filles ?

6. On jette un dé trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'avoir les points
a) 1, 4, 6 dans l'ordre ?
b) 1, 5, 5 dans l'ordre ?
c) 1, 4, 6 dans l'ordre ou dans le désordre ?
d) 1, 5, 5 dans l'ordre ou dans le désordre ?
e) 4, 4, 4 ?

7. On jette un dé quatre fois de suite. Quelle est la probabilité
a) que les 4 points obtenus forment une suite strictement croissante ?
b) Que le chiffre 6 apparaisse au moins une fois ?
c) Que la suite ne comprenne que des nombres pairs?

8. D'un jeu de 32 cartes, on extrait huit cartes. Soient les événements A et B .
A : "la main de huit cartes comprend exactement 3 coeurs"
B : "la main de huit cartes comprend exactement 3 piques"
A et B sont-ils indépendants ?

9. Une urne contient deux boules noires, trois boules blanches et une boule rouge. On extrait simultanément deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité qu'une des boules soit noire et l'autre rouge, sachant que les boules tirées sont de couleurs différentes ?

10. Une urne contient 2 boules blanches, une noire et une rouge. On y prend au hasard une boule et on la place dans une seconde urne qui contient déjà 2 boules rouges et une boule noire. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge dans la seconde urne ?

9. Solutions des exercices du chapitre.

9.1 Solutions du N° 3.5.

1) a)1/52 b) 1/4 c) 3/13 2) 5/ A_{12}^{3} = 5/1320 = 1/264
3)a) $1/2^4$ = 1/16 b) 6/16 = 3/8 4) a) 5/36 b) 10/36 c) 21/36
5) P(2) = 1/36 = P(12) P(3) = 2/36 = P(11) P(4) = 3/36 = P(10) P(5) = 4/36 = P(9)
P(6) = 5/36 = P(8) P(7) = 6/36
6) k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 1 $\Rightarrow$ k = 1/21 a)1/21, 2/21, ...6/21 b) 12/21 c) 9/21
7) 4/ $\overline{A}_{2}^{4}$ = ¼ 8) a) $(1/11)^4$ = 1/14641 b) $\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{7920}$
9) $8/P_4$ = 1/3 10) 1/32

9.2 Solutions du N° 4.3

1) 2/4 = 1/2 2) 15/40 = 3/8

9.3 Solutions du N° 5.3

1) 7/18 les événements sont dépendants 2) ¼ dépendants
3) P(2 filles) / P(la première est une fille) = (1/4) / (1/2) = ½ dépendants
4) P(A) = 25/100 P(B) = 15/100 $P(A \cap B) = 10/100 \neq P(A) . P(B) \Rightarrow$ événements dépendants.

9.4 Solutions du N° 6.1

1. A1= 1ère urne A2 = 2ème urne A3= 3ème urne P(A) = 1/3 . 3/4 + 1/3 . 2/5 + 1/3 . 3/7 = 221/420 ≅ 0,52
2. A1, A2, A3 = pièce fabriquée respectivement par machines A, B ou C A : pièce défectueuse
   P(A) = 50/100 . 3/100 + 30/100 . 4/100 + 20/100 . 5/100 = 37/1000
3. $\Omega = \{(N,N)\ (N,B)\ (B,B)\ (B,N)\}$ par le diagramme en arbre : $P(B,B) = \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{3}{28}$ et P(N,N)=
   $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{10}{28} \Rightarrow$ P(même couleur) = 13/28
4. P(c,c) + P(c,cp) + P(cp,c) = (48 + 24 + 48)/144 = 120/144 = 5/6
5. par le diagramme en arbre : a) a = atteint, r = raté P(a,r,r) + P(r,a,r) + P(r,r,a) = (1/6).(3/4).(2/3) + (5/6).(1/4).(2/3) + (5/6).(3/4).(1/3) = 31/72 b) P(A | B) = P(seul le premier l'atteint)/ P(1 seul tireur l'atteint) = (6/72) /(31/72) = 6/31
6. P({6}) = (4/5).(1/6) + (1/5).(2/3) = 2/15 + 2/15 = 4/15 ⇒ P(truqué si 6) = p(truqué et 6)/ P(6) = (2/15) : (4/15) = ½
7. P(F | >1,9) = P(F et > 1,9)/P(> 1,9)= (0,6/100) : (2,2/100) = 0,6/2,2 = 3/11 dépendants

9.5 Solution du N° 7

1. A B, C = 2 fiches tirées respectivement du premier, du second ou du troisième paquet sont connues.
   P(A) = 3/10 . 2/9 = 1/15 P(B) = 3/15 . 2/14 = 1/35 P(C) = 3/20 . 2/19 = 3/190
   a) $P(A \cap B \cap C) = P(A) . P(B) . P(C) = 3/99750$
   b)A = au moins une fiche connue A^c = aucune fiche connue A_1 = aucune fiche connue dans le paquet 1 A_2 = aucune fiche connue dans le paquet 2 A_3= ....$P(A_1)$ = 7/10 . 6/9 = 7/15 $P(A_2)$ = 22/35
   $P(A_3)$ = 68/95 $P(A^c)$ = 7/15 . 22/35 . 68/95 = 10472/49875 = 0,209.. P(A) = 1 - $P(A^c)$ = 0,79003
2. a) $C_{15}^4 / C_{30}^4 = 0{,}05$
   b) $P(A^c)$ = Nbre de choix de 4 poissons parmi 19 mâles / Nbre de choix de 4 poissons parmi 30 = $C_{19}^4 / C_{30}^4 =$ 0,14 ⇒ P(A) = 1 - 0,14 = 0,86
3. # cas possibles = 365^{10} # cas favorables : 365 . 364 . 363 ....(365 - 10 + 1) P(A) = 0,88
   Si 23 personnes alors on obtient une probabilité proche de ½ : P(A) = 0.4927 (si 22 pers : 0.5243)
4. sol : a) P(r,r) + P(b,b) = 5/8 . 2/8 + 3/8 . 6/8 = 7/16 = 0.4375
   b) P(r,r) dans urne A = 20/56 P(r,r) dans l'urne B = 2/56 ⇒ P(r,r,r,r) = 40 / 56^2
   P(b,b) dans l'urne A = 6/56 P(b,b) dans l'urne B = 30/56 ⇒ P(b,b,b,b) = 180/56^2
   P(toutes les billes de même couleur) = 220/56^2 = 0,070
5. sol : Par le diagramme en arbre : a) P(2 non défectueuses) = (5/8) . (3/5) = 3/8 b) P(une seule défectueuse) = (3/8) . (3/5) + (5/8) (2/5) = 19/40.
6. a) 1° : 1/2 2° : 3/20 b) 1° : 10/ A_{20}^2 = 1/380 = 1/38 2° : 6/ A_{20}^2 = 3/190
7. a) (7.5.3)/ C_{15}^3 =3/13 b) $\frac{C_5^2 .10}{C_{15}^3} + \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{110}{455} = \frac{22}{91}$ c) $1 - \frac{C_8^3}{C_{15}^3} = \frac{399}{455} = \frac{57}{65}$

8. a) $\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{21}{45}$ b) $\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$ c) $\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$

9. a) $\frac{A_6^5}{\overline{A}_6^5}=\frac{720}{7776}=0.09259$ b) $\frac{C_5^3.6.\overline{P}_5^2}{\overline{A}_6^5}=\frac{3600}{7776}=0.4629$ c) $\frac{C_6^2.C_4^1.\overline{P}_5^{2,2}}{\overline{A}_6^5}=\frac{1800}{7776}=0.2315$

   d) $\frac{6\,C_5^2.\overline{P}_5^3}{\overline{A}_6^5}=\frac{1200}{7776}=0.15432$ e) $\frac{6.5.\overline{P}_5^{3,2}}{\overline{A}_6^5}=\frac{300}{7776}=0.038$ f) $\frac{6.5.5}{\overline{A}_6^5}=\frac{150}{7776}=0.019$

   g) $\frac{6}{\overline{A}_6^5}=\frac{6}{7776}=0.0007$

10. P(cp,cp) = (3/5).(3/4) = 9/20

9.6 Solutions du N° 8

1. a) 2/100= 0,02 b) 2/90 = 0,0222...
2. 4/6 = 0,666...
3. a) 1/720 = 0,0013888 b) 1/120 = 0,008333
4. 1/10 = 0,1
5. 20/64 = 0,3125
6. a) 1/216 = 0,0046296... b) 1/216 = 0,0046296 c) 6/216 = 0,027777... d) 3/216 = 0,013888...
   e) 1/216 = 0,0046296
7. $\#\,\Omega = 6^4 = 1296$ a) $\#\,A = C_6^4 = 15 \Rightarrow P(A) = 0,011574$ b) $\#\,B = \overline{A}_6^4 - \overline{A}_5^4 = 1296 - 625 = 671 \Rightarrow$
   $P(B) = 0,51777469$ c) $\#\,C = \overline{A}_3^4 = 3^4 = 81 \Rightarrow P(C) = 0,0625$
8. $P(A) = \frac{C_8^3.C_{24}^5}{C_{32}^8}$ $P(B) = \frac{C_8^3.C_{24}^5}{C_{32}^8}$ $P(A \cap B) = \frac{C_8^3.C_8^3.C_{16}^2}{C_{32}^8}$
   $P(A \cap B) \neq P(A) . P(B) \Rightarrow$ événements dépendants.
9. (par le diagramme en arbre) $\frac{P(\text{NetR})}{P(\text{2couleurs} \neq)} = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}}{1-P(\text{même couleur})} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{11}{15}} = \frac{2}{11}$
   P (même couleur) = P (NN) + P(BB) = $\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{15}$
10. Par le diagramme en arbre ou par le théorème des probabilités totales :
    P(R dans 2$^{\text{ème}}$ urne) = $\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{16}$