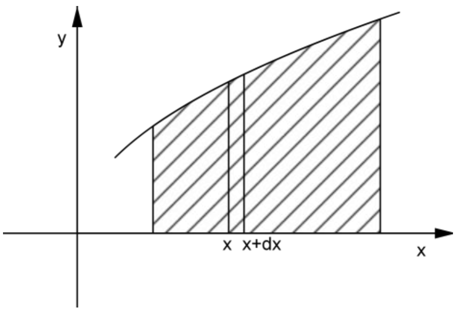
XIII. Applications des intégrales définies.

1. Calculs d'aires

1.1 Rappels.

Dans le chapitre précédent, nous avons établi comment calculer l'aire d'une surface limitée par le graphe d'une fonction y = f(x), l'axe des x et 2 droites verticales d'équations respectives x = a et x = b et nous avons conclu :



Si f continue sur [a , b]
F une primitive de f (c.-à-d. $F'(x) = f(x)$), dA = élément d'aire = f(x) dx
alors :
$A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$ = F(b) - F(a) = aire de la surface hachurée.

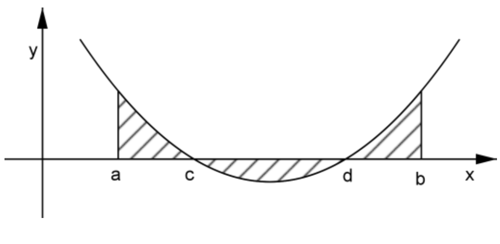
Avec les remarques suivantes :

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. Pour une fonction telle que l'exemple proposé dans le graphe ci-dessous :

   $\int_a^c f(x)dx > 0$ $\quad \int_c^d f(x)dx < 0$ et $\int_d^b f(x)dx > 0$

   donc, l'aire hachurée $A = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$



1.2 Exemple 1 : aire d'un trapèze

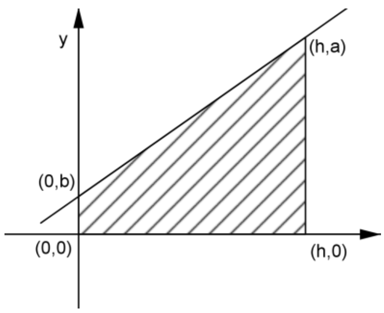
équation de d ∍ (0,b) et (h,a) : $d \equiv y - b = \frac{a-b}{h-0}(x-0)$

$d \equiv y = \frac{a-b}{h}x + b \Rightarrow f(x) = \frac{a-b}{h}x + b$

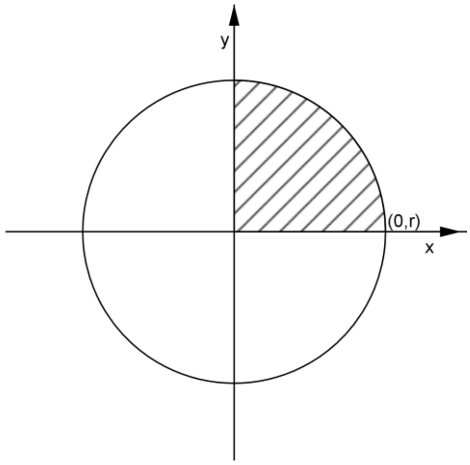
$A = \int_0^h f(x)dx = \int_0^h \left(\frac{a-b}{h}x + b\right)dx$

$= \left[\frac{a-b}{h}\frac{x^2}{2} + bx\right]_0^h = \frac{a-b}{h}\frac{h^2}{2} + bh - \left(\frac{a-b}{h}\cdot 0 + b\cdot 0\right) = \frac{(a-b)h}{2} + bh =$

$\frac{ah - bh + 2bh}{2} = \frac{(a+b)h}{2}$



1.3 *Exemple 2 : aire du cercle*



Partant de l'équation cartésienne d'un cercle centré à l'origine et de rayon r :

C ≡ $x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow y^2 = r^2 - x^2$ et donc $f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

L'aire du cercle = 4 fois l'aire hachurée et donc A = 4 $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$

soit x = r sin t : si $x = 0 \Rightarrow t = 0$ et si $x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

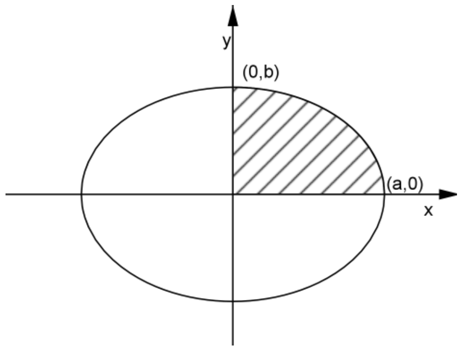
et dx = r cos t dt

$$A = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t}\,.\, r\cos t\, dt = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$

$$2r^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt$$

$$= 2r^2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi r^2$$

1.4 *Exemple 3 : aire de l'ellipse*



Comme pour le cercle, considérons l'équation cartésienne de l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \text{ et donc : } f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow A = 4\,\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}$$

soit x = a sin t si $x = 0 \Rightarrow t = 0$ et si $x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$A = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\; a\cos t\, dt = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 t\, dt = \ldots = \pi ab$$

1.5 *Exercices.*

1.5.1 Série 1

Calculer et interpréter graphiquement :

1. $\int_{-1}^{2} x^2\, dx$
2. $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 1)\, dx$
3. $\int_0^2 (x^2 - x + 3)\, dx$
4. $\int_2^5 \sqrt{1 + x}\, dx$
5. $\int_{-1}^{0} \sqrt{2 - 3x}\, dx$
6. $\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$
7. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x\, dx$

Solutions :

1) 3 2) 0 3) $\frac{20}{3}$ 4) $(4\sqrt{6} - 2\sqrt{3})$ 5) $\frac{2}{9}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$ 6) 1 7) -2

1.5.2 Série 2 : si l'unité de longueur est u,

1. Calculer l'aire de la région du plan comprise entre la courbe $y = \frac{1}{x}$, les droites x = 1 ,x = 3 et l'axe des x.

sol : ln 3 u^2

2. Calculer l'aire de la région du plan comprise entre la courbe y = $e^{\frac{x}{3}}$ et les droites x = 1, x = 3 et y = -1

sol : $3\left(e - e^{\frac{1}{3}}\right) + 2 \cong 5.968\ u^2$

3. Calculer l'aire comprise entre les courbes d'équation $y = e^x$, $y = e^{-x}$ et la droite x = 4

sol : $e^4 + e^{-4} - 1 - 1 \cong 52{,}6164\ u^2$

1.5.3 Série 3

Représenter et calculer l'aire comprise entre les graphes de f et g si u est l'unité de longueur

1. $f(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 4x - 5)$ et $g(x) = x^2 - 1$ sol : $6\ u^2$
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3$ et $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ sol : $27\ u^2$
3. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ sol : $\frac{1}{3}\ u^2$
4. $f(x) = -x + 2$ et $g(x) = x^2 - 4$ sol : $\frac{125}{6}\ u^2$
5. $f(x) = -x^2 + 4$ et $g(x) = 3$ sol : $\frac{4}{3}\ u^2$
6. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ et entre les droites x = 1 et x = 2 sol : $\frac{3}{2}\ u^2$

1.5.4 Série 4

1. Soit l'ellipse $E \equiv 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ Calculer l'aire de la surface de cette ellipse comprise entre les droites verticales comprenant ses foyers. sol : $12 \arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{3} + \dfrac{8\sqrt{5}}{3} \cong 16.06\ u^2$
2. Calculer l'aire de l'ellipse $E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ comprise entre les droites d'équation $x = -\frac{a}{2}$ et $x = \frac{a}{2}$

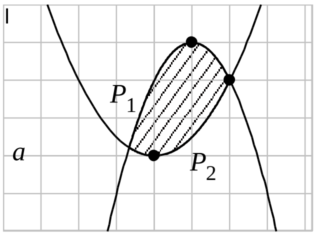
   sol : $\frac{1}{6}ab(2\pi + 3\sqrt{3})\ u^2$
3. Calculer l'aire du cercle $C \equiv x^2 + y^2 = r^2$ comprise entre les droites d'équations $x = -\dfrac{r}{2}$ et $x = \dfrac{r}{2}$

   sol : $r^2\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) u^2$
4. Soit $f(x) = x\,e^x$. Calculer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x et les droites verticales comprenant respectivement le minimum et le point d'inflexion de cette fonction. sol : $\dfrac{2}{e} - \dfrac{3}{e^2} = 0.33\ u^2$
5. $f(x) = x\,e^{-x^2}$. Calculer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x et la droite verticale comprenant le maximum de cette fonction. sol : $\frac{1}{2}(1 - e^{-0.5})\ u^2$
6. Soit $E \equiv \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Calculer l'aire comprise entre cette ellipse et les droites verticales comprenant les foyers. sol : $30 \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{72}{5} \cong 42.22\ u^2$

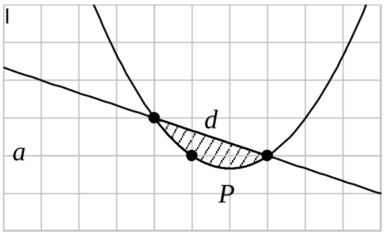
1.5.5 Série 5

1. Dans chacun des cas suivants, calculer l'aire de la surface hachurée, l'unité d'aire étant l'aire d'un carré du quadrillage, sachant que

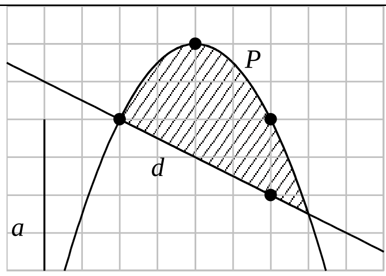
- P1, P2, et P sont des paraboles dont l'axe est parallèle à la droite a
- C est un cercle de centre O
- H et H' sont des hyperboles dont les asymptotes sont les droites a_1 et a_2 et les droites a'1 et a'2



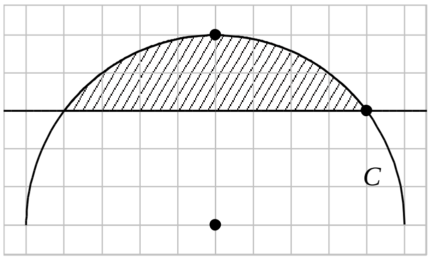
1



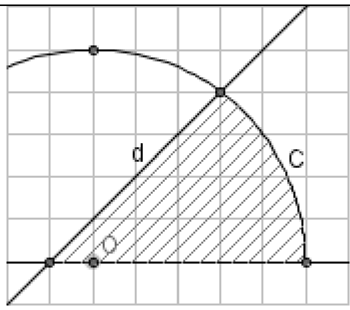
2



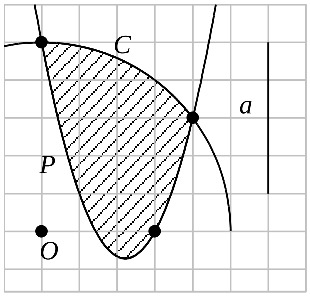
3



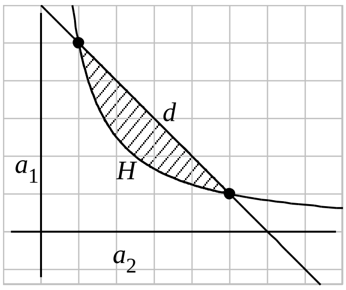
4



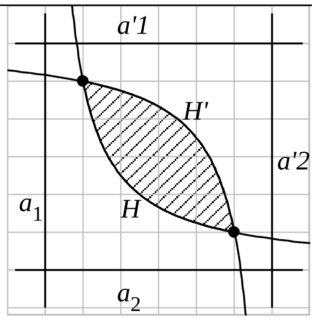
5



6



7



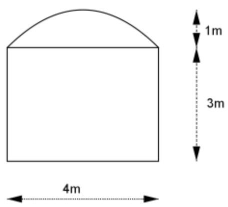
8

<u>Solutions</u> : 1) $\frac{128}{27}$ u^2 2) $\frac{3}{2}$ u^2 3) $\frac{125}{12}$ u^2 4) (25arcsin $\frac{4}{5}$ -12) u^2

5) $(2 + \frac{25\pi}{4} - \frac{25}{2}\text{arcsin}\,\frac{3}{5})$ u^2

6) $(\frac{25}{2}$ arcsin $\frac{4}{5} + \frac{22}{9})$ u^2 7) (12 – 5 ln 5) u^2 8) (24 – 10 ln 5) u^2

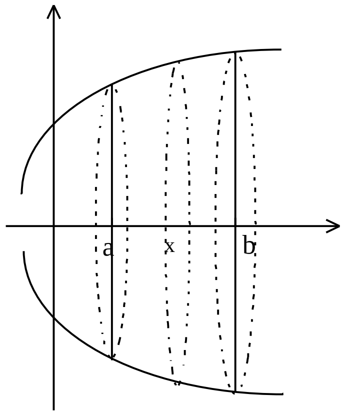
2. Un mur de 12 m de long et 6m de haut est percé d'une porte ayant la forme d'un rectangle surmonté d'un arc parabolique (cfr schéma ci-contre). Calculer la quantité de peinture à employer pour repeindre le mur sachant qu'il faut un litre de peinture pour couvrir une surface de 10m^2.



<u>Solution</u> : Aire de la porte : $\frac{44}{3}$ m^2 $\Rightarrow$ 5,73 litres de peinture.

2. Calcul de volumes.

2.1 Volumes de révolution autour de l'axe des abscisses



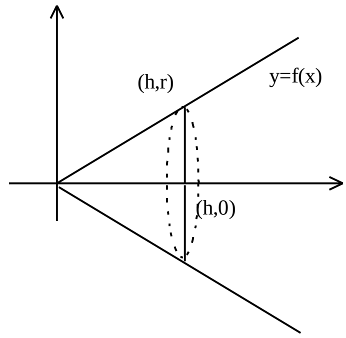
Comme dans le cas du calcul d'aire où nous avons montré $A = \int_a^b dA$

De même, le volume d'un solide de révolution $V = \int_a^b dV$

où $dV = \pi f^2(x)\,dx$: volume élémentaire (c. à d. un cylindre de rayon f(x) et d'épaisseur dx) lors de la rotation autour de l'axe des x de la surface limitée par l'axe des x, la courbe y = f(x) et les droites x = a et x = b $\Rightarrow V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$

2.2 Applications.

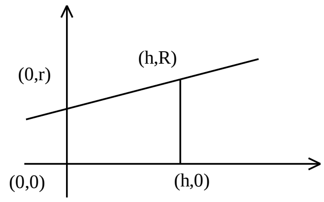
2.2.1 Volume d'un cône de rayon r et de hauteur h



Un cône de hauteur h et dont le rayon de la base vaut r est engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du triangle ci-contre où $f(x) = \frac{r}{h}x$

$$V = \int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

2.2.2 Volume d'un tronc de cône



Un tronc de cône de hauteur h et dont les rayons respectifs de la petite et de la grande base sont r et R est engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du trapèze ci-contre.

La droite comprenant les points (0,r) et (h,R) a pour équation :

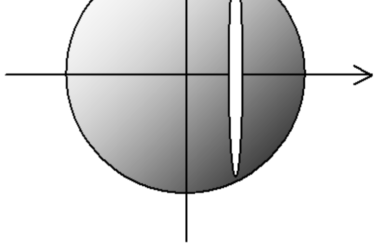
$$y - r = \frac{R-r}{h-0}(x-0) \Leftrightarrow f(x) = \frac{R-r}{h}x + r$$

$$\Rightarrow V = \int_0^h \pi\left(\frac{R-r}{h}x + r\right)^2 dx = \frac{h\pi}{R-r}\int_0^h \frac{R-r}{h}\left(\frac{R-r}{h}x + r\right)^2 dx$$

en utilisant les intégrales quasi-immédiates : $u' = \frac{R-r}{h}$ et $u = \frac{R-r}{h}x + r$ alors V =

$$\frac{h\pi}{R-r}\left[\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^3\frac{1}{3}\right]_0^h = \frac{h\pi}{3(R-r)}\left[\left(\frac{R-r}{h}h+r\right)^3 - r^3\right] = \frac{\pi h}{3(R-r)}(R^3-r^3) = \frac{\pi h}{3}(R^2 + rR + r^2)$$

2.2.3 Volume d'une sphère

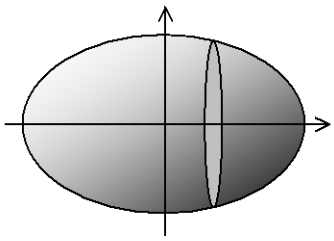


La sphère de rayon r est engendrée par la rotation autour de l'axe des x du cercle de centre 0 et de rayon r : $C \equiv x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} = f(x)$

en utilisant les propriétés de symétrie : $V = 2\int_0^r \pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx$

$$= 2\pi\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right] = 2\pi\,\frac{2r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2.2.4 Volume d'un ellipsoïde de révolution



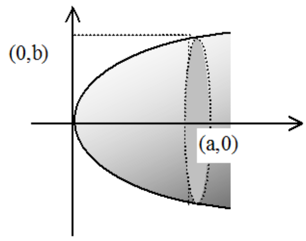
Le cas de l'ellipsoïde de révolution est tout à fait semblable à celui de la sphère mais est engendré par une ellipse au lieu d'un cercle.

$E \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ et $f(x) = \pm\ \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$$V = 2\int_0^a \pi\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx = \frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a =$$

$$\frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^3-\frac{a^3}{3}\right] = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

2.2.5 Volume d'un segment de paraboloïde de révolution



Considérons le volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la parabole d'équation $y^2 = 2px$ limitée à l'origine et à la droite d'équation $x = a$

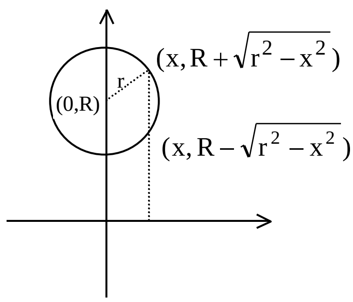
$P \equiv y^2 = 2px \Rightarrow f(x) = \sqrt{2px}$

$$\Rightarrow V = \int_0^a \pi\left(\sqrt{2px}\right)^2 dx = 2\pi p\int_0^a x\,dx = 2\pi p\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \pi\ pa^2$$

<u>Remarque</u> : $V = \pi\ pa^2 = \frac{\pi\ a}{2}\ 2pa = \frac{\pi\ a}{2}\ b^2 = \frac{1}{2}\ \pi\ ab^2$

qui nous montre que le volume du paraboloïde de révolution vaut la moitié du volume du cylindre de même base et de même hauteur.

2.2.6 Volume d'un tore



Un tore est le volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses d'un cercle de rayon r et de centre (0,R) comme dans la figure ci-contre. Une bonne image d'un tel volume nous est donnée par une "chambre à air".

$C \equiv (x - 0)^2 + (y - R)^2 = r^2 \Rightarrow y = R \pm \sqrt{r^2-x^2}$

En utilisant les propriétés de symétrie, nous obtenons :

$$V = 2\left[\int_0^r \pi\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx - \int_0^r \pi\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx\right]$$

Après simplification des termes semblables, nous obtenons :

$$V = 8\pi\ R\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\ dx$$

en posant $x = r \sin t \Rightarrow dx = r \cos t\ dt$ et si $x = 0 \Rightarrow t = 0$ si $x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow V = 8\ \pi\ R\ r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\ t\ dt = 4\ \pi\ R\ r^2\int_0^{\pi/2}(1 + \cos 2t)\ dt = 4\ \pi\ R\ r^2\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = 4\ \pi\ R\ r^2\ \frac{\pi}{2} = 2\ \pi^2 R\ r^2$$

3. Exercices.

3.1 Série 1

1. Calculer le volume d'un cône de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des x de la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$. Le cône est limité par l'origine et a pour hauteur h. sol : $\frac{\pi\ h^3}{12}$

2. Calculer le volume d'un tronc de cône de hauteur h dont une base a pour rayon r et l'autre base R.

sol : $\frac{\pi h}{3(R-r)}(R^3 - r^3)$ (si h = 5, r = 3 et R = 6 : V = 105π)

3. Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des x du quadrilatère ABCD si A(1,0) B(1,1) C(3,2) D(3,0) sol : $\frac{14\pi}{3}$

4. Calculer en fonction de a et b le volume de l'ellipsoïde de révolution compris entre les plans perpendiculaires à l'axe focal comprenant les points ($-\frac{a}{2}$, 0) et ($\frac{a}{2}$,0) de l'ellipse génératrice d'équation

   $E \equiv b^2 x^2 + a^2y^2 - a^2 b^2 = 0$ (a > b) sol : $\frac{11}{12}\pi ab^2$

5. Calculer en fonction de p le volume du paraboloïde de révolution compris entre le sommet et le plan perpendiculaire à l'axe focal comprenant le foyer de la parabole génératrice d'équation $y^2 - 2px = 0$

   sol : $\frac{p^3\pi}{4}$

3.2 *Série 2*

1. Calculer le volume du segment sphérique d'une sphère $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, compris entre les plans perpendiculaires à OX aux points d'abscisses 0 et $\frac{r}{2}$. sol : $\frac{11}{24}\pi r^3$

2. Calculer, en fonction de a et b le volume de l'hyperboloïde de révolution compris entre les plans perpendiculaires à l'axe focal, comprenant les points (a, 0) et (2a, 0) de l'hyperbole génératrice d'équation

   $H \equiv b^2 x^2 - a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$ sol : $\frac{4}{3}\pi ab^2$

3. Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe OX de la surface limitée par le graphe de

   $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et les droites d'équation x = a et x = 2a (a > 0) sol : $\pi \ln 2$

4. Calculer le volume engendré par le cercle $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ dans sa rotation autour de l'axe OX.

   sol : $24\pi^2$

5. Calculer le volume engendré dans sa rotation autour de l'axe OX par la surface comprise entre les graphes de $f(x) = \sqrt{x+4}$ et $g(x) = \frac{1}{4}(x + 7)$ sol : $\frac{16\pi}{3}$

6. Considérons la surface limitée par la parabole $P \equiv y = 4 - x^2$ et la droite y = 2. Calculer le volume engendré par la rotation de cette surface autour de la droite y = 2 sol : $\frac{64\sqrt{2}\pi}{15}$

3.3 *Série 3*

1. Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des y de la surface limitée par la courbe

   $y = x^2 - 1$ et la droite y = 2 sol : $\frac{9\pi}{2}$

2. a)Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la parabole $P \equiv y^2 = 8x$ et la droite $d \equiv x = 2$
   b) Calculer le volume engendré par la rotation autour de la droite d de cette surface.

   sol : a) $\frac{32}{3}$ b) $\frac{256\pi}{15}$

3. Calculer le volume engendré par la rotation de la surface limitée par $y = x^3$ et y = 8 et l'axe des ordonnées

   a) autour de l'axe des x sol : $\frac{768\pi}{7}$

   b) autour de la droite $d \equiv x = 2$ sol : $\frac{144\pi}{5}$

4. Calculer le volume engendré par la rotation de la surface limitée par les courbes $x = 9 - y^2$ et $x - 7 = y$

   a) autour de l'axe des ordonnées sol : $\frac{333\pi}{5}$

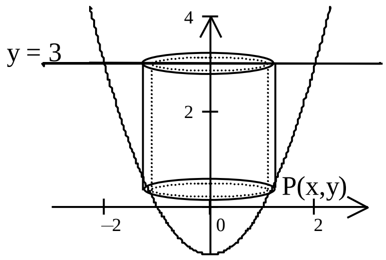
   b) autour de la droite $d \equiv x = 2$ sol : $\frac{243\pi}{5}$

5. Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des x de la surface comprise entre la parabole $y = -x^2 - 3x + 10$ et la droite $y = 7 - x$ sol : $\frac{1024\pi}{5}$

3.4 Méthode du tube

3.4.1 Principe de la méthode (à partir d'un exemple)

Soit à calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des y de la surface limitée par la parabole $y = x^2 - 1$ et la droite $y = 3$
On peut considérer ce volume comme la somme d'une infinité de "tubes" de rayon r, d'épaisseur dx et de hauteur $3 - y$
En approximant le volume de ce tube par celui d'un parallélépipède rectangle de longueur $2\pi x$, de hauteur $3 - y = 3 - x^2 + 1 = 4 - x^2$ et d'épaisseur dx, nous avons donc $V = \int_0^2 2\pi x.(4 - x^2)\,dx =$



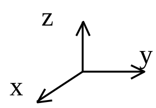
$$2\pi\int_0^2 (4x - x^3)\,dx = 2\pi\left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi\left[8 - \frac{16}{4}\right] = 8\pi$$

3.4.2 Exercices (en utilisant la méthode du tube)

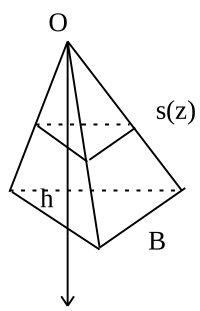
1. Soit la surface limitée par la parabole $y^2 = 8x$ et par la droite $x = 2$. Calculer le volume engendré par la rotation de cette surface autour de l'axe des ordonnées. sol : $\frac{128\pi}{5}$ unités
2. Soit la surface limitée par la parabole $y^2 = 8x$ et par la droite $x = 2$. Calculer le volume engendré par la rotation de cette surface autour de la droite $x = 2$. sol : $\frac{256\pi}{15}$ unités
3. Calculer le volume du tore engendré par la rotation du cercle $x^2 + y^2 = 4$ autour de la droite $x = 3$ sol : $24\pi^2$ unités
4. Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des y de la surface limitée par la parabole $y = 2x^2$ et les droites $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$ sol : $625\,\pi$ unités
5. Calculer le volume engendré par la rotation autour de la droite d'équation $x = 6$, de la surface limitée par la parabole $y = 2x^2$ et les droites $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$ sol : 375π unités
6. Calculer le volume engendré par la rotation autour de la droite $y = 8$ de la surface limitée par la courbe $y = x^3$, l'axe des x et la droite $x = 2$ sol : $\frac{320\pi}{7}$

3.5 Volumes quelconques

$dV = s(z)\,dz$ et $V = \int_a^b dV = \int_a^b s(z)\,dz$



Application : volume d'une pyramide.
Considérons une pyramide de sommet O, de base B et de hauteur h



$$V = \int_a^b s(z)\,dz$$

or $\frac{s(z)}{B} = \left(\frac{z}{h}\right)^2$ (à partir des relations de similitude des triangles.)

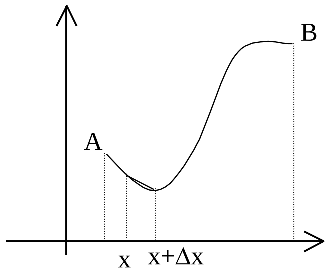
$$\Rightarrow s(z) = \frac{B}{h^2}z^2 \Rightarrow V = \int_0^h \frac{B}{h^2}\,z^2 dz = \frac{B}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}Bh$$

4. Longueur d'un arc

4.1 Calcul de la longueur d'une courbe

La longueur d'une courbe peut également être obtenue par le calcul d'une intégrale définie.
En effet, considérons une courbe quelconque d'équation $y = f(x)$
(en supposant que f(x) et sa dérivée f' (x) sont continues sur l'intervalle [a, b] et que f(x) y est positive)

Soient deux points de la courbe A (a, f(a)) et B((b, f(b))
Si on procède à une découpe de l'intervalle [a, b] en n petits intervalles de type $[x_i, x_{i+1}]$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$, on peut approximer la longueur de la courbe comprise entre les points A et B par la somme de petits segments de droites compris entre les points A_i (x_i ,$f(x_i)$) et A_{i+1} (x_{i+1}, $f(x_{i+1})$) pour i variant de 0 à n - 1



$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} | A_i A_{i+1} |$$

La longueur de l'un de ces intervalles valant :

$$|A_iA_{i+1}| = \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (f(x_{i+1})-f(x_i))^2}$$

En prenant tous les intervalles de même longueur Δx, nous obtenons

$$|A_iA_{i+1}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x_i+\Delta x)-f(x_i))^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{f(x_i+\Delta x)-f(x_i)}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

$$= \sqrt{1+\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} | A_i A_{i+1} | = \lim_{\Delta x\to 0} \sum \sqrt{1+\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Nous avons ainsi obtenu une méthode de calcul de la longueur d'une courbe comprise entre ces deux points.

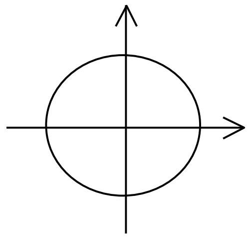
$$\boxed{L(\text{courbe AB}) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

4.2 Application

Soit à calculer la longueur du cercle. Comme dans le cas du calcul de la surface du cercle, nous nous servons des propriétés de symétrie et ne calculons que le quart du cercle (situé dans le premier quadrant).

A partir de l'équation du cercle : $x^2 + y^2 = r^2$, nous tirons : $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

et donc : $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$



$$L = \int_0^r \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$$

Par le changement de variable : $x = rt \Rightarrow dx = r\,dt$
Les bornes d'intégration deviennent alors : si $x = 0 \Rightarrow t = 0$ et si $x = r \Rightarrow t = 1$

$$\Rightarrow L = r \cdot \int_0^1 \frac{r\,dt}{\sqrt{r^2-r^2t^2}} = r \cdot \int_0^1 \frac{r\,dt}{r\sqrt{1-t^2}} = r\,[\arcsin t]_0^1 = r\,(\arcsin 1 - \arcsin 0) = r\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}\,r$$ et nous

retrouvons bien la longueur du cercle = 4 L = 2πr

4.3 Exercices

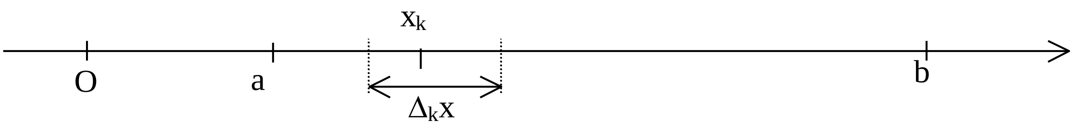
1. Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y = \sqrt{x^3}$ entre les points x = 0 et x = 5 sol : $\dfrac{335}{27}$ unités
2. Calculer la longueur de l'arc de chaînette : $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ de x = 0 à x = a sol : $\dfrac{1}{2}a\left(e-\dfrac{1}{e}\right)$ unités
3. Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y^3 = 8x^2$ de x = 1 à x = 8 sol : $\dfrac{104\sqrt{13}-125}{27}$ unités
4. Calculer la longueur de l'arc de la courbe $6xy = x^4 + 3$ de x = 1 à x = 2 sol : $\dfrac{17}{12}$ unités

5. **Calculer la longueur de l'arc de parabole $y^2 = 12x$ limité par la droite $x = 3$
   sol : $6\ [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$ unités

5. Travail d'une force

5.1 Calcul

Nous savons que le travail W effectué par une force constante agissant sur une distance d le long d'une droite, vaut F . s unités de travail.
Si maintenant, nous considérons le cas d'une force variant de façon continue le long d'une droite. Soit x la distance du point d'application de la force à un point fixe de la droite, pris comme origine. La force au point x est donnée par la fonction F(x).



Une valeur approchée du travail effectué par une force, lorsque son point d'application se déplace de x = a à x = b, est obtenue de la manière suivante :

- On divise l'intervalle [a, b] en n intervalles de longueur $\Delta_k x$. Soit x_k, un point du $k^{ème}$ intervalle.
- On procède comme si la force était constante sur le $k^{ième}$ intervalle et égale à $F(x_k)$. Le travail effectué pendant ce déplacement élémentaire est $F(x_k)\ \Delta_k x$
- Et le travail total effectué par les n forces est donc $\sum_{k=1}^{n} F(x_k)\Delta_k x$

Lorsque le nombre d'intervalles tend vers l'infini de telle sorte que $\Delta_k x$ tend vers 0 et en appliquant le théorème fondamental, on obtient :

$$\boxed{W = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(x_k)\Delta_k x = \int_a^b F(x)\,dx}$$

5.2 Application

Allongement d'un ressort. Si on demeure dans certaines limites, la force nécessaire pour tendre un ressort est proportionnelle à son allongement. La constante de proportionnalité est appelée constante de rappel du ressort.
Si une force de 100 N est nécessaire pour allonger de 0,5 cm un ressort, dont la longueur au repos est de 25 cm, calculer le travail effectué pour l'allonger de 27 à 30 cm.
Soit x, l'allongement, alors F(x) = kx.
Quand x = 0,5, F(x) = 100 $\Rightarrow$ k = 200 et F(x) = 200x
Le travail correspondant à l'allongement Δx est $200x\ .\ \Delta x$ et donc : $W = \int_2^5 200x\,dx = 2100$ cm.N = 21 J

5.3 Exercices

1. La constante de rappel d'un ressort est 4N/m. Calculer le travail effectué pour le comprimer de 0,025 m.
2. Un câble pesant 40 N/m se déroule d'un treuil cylindrique. 15 m sont déjà déroulés. Calculer le travail effectué par la force de pesanteur pour dérouler 75 m supplémentaires.
3. Un câble de 30 m pèse 70 N/m. A une de ses extrémités est attaché un contrepoids de 7000 N. Calculer le travail effectué pour enrouler 24 m de câble sur un treuil.