XII . Primitives.

1. Intégrales immédiates.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, certaines intégrales peuvent être déterminées directement à partir des formules de dérivation.

Remarquons cependant : $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

En effet : si $x > 0$: $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

si $x < 0$ $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$

Nous pouvons maintenant rassembler l'ensemble des formules d'intégrales immédiates dans le tableau suivant :

$$\int 0\,dx = C$$

$$\int a\,dx = ax + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \forall\, n \in R\backslash\{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C = \ln(C'|x|)$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C = \int (1 + \operatorname{cotg}^2 x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{Arcsin} x + C = -\operatorname{Arccos} x + C'$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arctg} x + C = -\operatorname{Arccotg} x + C'$$

2. Intégration par décomposition.

Rappelons la première méthode d'intégration rencontrée dans le chapitre précédent et que nous allons maintenant employer de manière plus générale :

$$\boxed{\int (m\,.f(x) + p.g(x))\,dx = m\int f(x)\,dx + p\int g(x)\,dx}$$

<u>Preuve</u> : Soit F(x) une primitive de f(x) et G(x) une primitive de g(x) $\Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = g(x)$

$\Rightarrow [m\,F(x) + p\,G(x)]' = m\,F'(x) + p\,G'(x) = m\,f(x) + p\,g(x)$

$\Leftrightarrow$ m F(x) + p G(x) est bien une primitive de m f(x) + p g(x)

Et nous avons bien : $\int (m\,.f(x) + p.g(x))\,dx = m\int f(x)\,dx + p\int g(x)\,dx$

2.1 Exemple :

$$\int \frac{1+x^2}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int x\,dx = \ln|x| + \frac{x^2}{2} + C$$

2.2 Exercices :

1. $\int (3x^5 - 5)\,dx$
2. $\int (2x^3 - 3x + 5)\,dx$
3. $\int (5x^4 - 3x^2 + 2x - 1)\,dx$
4. $\int (\sqrt{x^3} + \sin x)\,dx$
5. $\int (5\sin x - 3\cos x)\,dx$
6. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$
7. $\int \frac{1-x^2}{x^4}\,dx$
8. $\int (4\sin x - \frac{3}{1+x^2})\,dx$
9. $\int \frac{(x^2-3)^3}{x^2}\,dx$
10. $\int \frac{x^3-3x^2-5}{x^3}\,dx$
11. $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x}\right)dx$
12. $\int \frac{3x^2-5x}{2x^2}\,dx$
13. $\int \left(\frac{4\sqrt{x}}{2x} - 5x\sqrt{x}\right)dx$
14. $\int \frac{5}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx$
15. $\int (3+\tan^2 x)\,dx$
16. $\int \frac{5x^2-2x}{\sqrt{x}}\,dx$
17. $\int \frac{5x^2-3x^3\sin x+5x}{x^3}\,dx$
18. $\int (4e^x + 5.2^x)\,dx$
19. $\int \frac{4(2x^2-5)^2}{x^3\sqrt{x}}\,dx$
20. $\int \frac{5\cos^2 x\sin x - 2\sin^2 x\cos x}{\sin x\cos x}\,dx$
21. $\int \frac{3x^2-5x\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\,dx$
22. $\int \frac{1-\sin^2 x}{\cos x}\,dx$
23. $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

2.3 Remarque :

Parfois, la décomposition n'apparaît pas directement, comme dans les exemples suivants :

1. $\int \tan^2 x\,dx = \int ((1+\tan^2 x) - 1)\,dx = \int (1+\tan^2 x)\,dx - \int dx = \tan x - x + C$
2. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \text{tg } x - \text{cotg } x + C$
3. $\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(-1-x^2)+2}{1+x^2}\,dx = -\int dx + 2\int \frac{dx}{1+x^2} = -x + 2\,\text{arctg } x + C$

3. Intégration par substitution (changement de variable)

soit $x = g(t)$ alors $dx = dg(t) = g'(t)\,dt$
alors $\int f(x)\,dx = \int f(g(t)).g'(t)\,dt$ où $t = g^{-1}(x)$

3.1 Exemples :

1. $\int \sin 3x\,dx$ $\qquad u = 3x \qquad du = 3\,dx \qquad dx = \frac{du}{3}$

$\Rightarrow \int \sin 3x\,dx = \int \sin u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \sin u\; du = -\frac{\cos u}{3} + C = -\frac{\cos 3x}{3} + C$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ $\qquad u = 1 - x \qquad du = -\,dx \qquad dx = -\,du$

$\Rightarrow dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}(-du) = -\int u^{-\frac{1}{2}}du = -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -2\sqrt{u} + C = -2\sqrt{1-x} + C$

3. $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$ $\qquad u = \cos x \qquad du = -\sin x\,dx$

$\Rightarrow \int \tan x\,dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$

3.2 Exercices :

Calculer :

1. $\int (1-2x)^3\,dx$
2. $\int \cos\frac{x}{2}\,dx$
3. $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\,dx$
4. $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$
5. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$
6. $\int e^{3x}\,dx$
7. $\int 2x\,e^{x^2}\,dx$
8. $\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx$
9. $\int \sin 3x \cos x\,dx$

3.3 Intégrales quasi-immédiates.

exemple : soit à calculer $\int 2x\,(x^2-5)^3\,dx$

nous observons : $2x = (x^2 - 5)'$ et donc si nous posons $x^2 - 5 = u$ nous avons $du = 2x\,dx$ et l'intégrale à déterminer devient du type : $\int u'(x)\cdot u^n(x)\;\; dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \Rightarrow \int 2x\,(x^2-5)^3 dx = \frac{(x^2-5)^4}{4} + C$

A partir du tableau des intégrales immédiates, nous déduisons aisément celui des intégrales *"quasi-immédiates"*

$$\int u'(x)\,u^n(x)dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad \forall\, n \in R\backslash\{-1\}$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u(x)| + C$$

$$\int u'(x)\,e^{u(x)}dx = \int e^u du = e^{u(x)} + C$$

$$\int u'(x)\,a^{u(x)}dx = \int a^u du = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C$$

$$\int u'(x)\cos u(x)\,dx = \int u'(x)\cos(u(x))\,dx = \int \cos u\,du = \sin(u(x)) + C$$

$$\int u'(x)\sin u(x)\,dx = \int \sin u\,du = -\cos u(x) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}\,dx = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\,(u(x)) + C = \int (1 + \mathrm{tg}^2 u)\,du$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}\,dx = \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{cotg}\,(u(x)) + C = \int(1 + \mathrm{cotg}^2 u)\,du$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}\,dx = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{Arcsin}\,(u(x)) + C = -\,\text{Arccos}\,(u(x)) + C'$$

$$\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\,dx = \int \frac{du}{1+u^2} = \text{Arctg}\,(u(x)) + C = -\,\text{Arcotg}\,(u(x)) + C'$$

3.4 Exercices.

Calculer les intégrales suivantes (par substitution ou par intégrales quasi -immédiates)

1. $\int (2x)\cdot(x^2-1)^3\,dx$
2. $\int (2x+1)(x^2+x-3)^2\,dx$
3. $\int 2x\sin x^2\,dx$
4. $\int 3x^2 e^{x^3+3}\,dx$
5. $\int (1-2x)^3\,dx$
6. $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\,dx$
7. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
8. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$
9. $\int \frac{x^2}{\cos^2 2x^3}\,dx$
10. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
11. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x}\,dx$
12. $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$
13. $\int (1+\text{tg}\,x)^2\,dx$
14. $\int 3\sin x\cos x\,dx$
15. $\int \sqrt{a+bx}\,dx =$
16. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\,dx$
17. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$
18. $\int \frac{\sin 2x}{1-\sin^2 x}\,dx$
19. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx$
20. $\int \frac{\sin 4x}{\cos^2 2x}\,dx$
21. $\int \frac{dx}{4+x^2}$
22. $\int \frac{dx}{7+x^2}$
23. $\int \frac{dx}{3+5x^2}$
24. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$
25. $\int \frac{dx}{3x^2+x+1}$
26. $\int \frac{dx}{2x^2-x+5}$
27. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
28. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+2)^2}}$
29. $\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}}$
30. $\int \frac{dx}{\sin x}$
31. $\int \frac{dx}{\cos x}$

4. Substitutions trigonométriques

4.1 Exemple.

soit I = $\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx =$

soit x = r sin u dx = r cos u du

$\Rightarrow$ I = $\int \sqrt{r^2-r^2\sin^2 u}\,.r\cos u\,du = \int \sqrt{r^2(1-\sin^2 u)}\,.\,r\cos u\,du = \int r\cos u\,.\,r\cos u\,du = \int r^2\cos^2 u\,du = r^2\int \cos^2 u\,du$

or $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \Rightarrow I = r^2\int \frac{1+\cos 2u}{2}\,du = r^2\left(\frac{u}{2}+\int\frac{\cos 2u}{2}du\right) = \frac{r^2u}{2}+r^2\,\frac{\sin 2u}{2}\cdot\frac{1}{2}+C =$

$\frac{r^2u}{2}+r^2\,\frac{2\sin u\cos u}{2}\cdot\frac{1}{2}+C = \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}+\frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2}+C$

4.2 Remarque. (*)

Si la fonction à intégrer contient un facteur $\sqrt{a^2-b^2x^2}$, $\sqrt{a^2+b^2x^2}$ ou $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ mais aucun autre facteur irrationnel, les substitutions suivantes permettent souvent de résoudre l'intégrale :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour } \sqrt{a^2 - b^2x^2}\text{, on utilise } x = \frac{a}{b}\sin t \\ \text{pour } \sqrt{a^2 + b^2x^2}\text{, on utilise } x = \frac{a}{b}\text{tg } t \\ \text{pour } \sqrt{b^2x^2 - a^2}\text{, on utilise } x = \frac{a}{b\cos t}\end{array}}$$

4.3 *Exemple (*)*

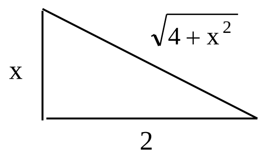
$I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$ $\qquad\qquad$ $x = 2 \text{ tg } t \Rightarrow dx = \frac{2}{\cos^2 t}dt$

$$\Rightarrow I = \int \frac{2dt}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{4\text{tg}^2 t}\cdot\frac{1}{\sqrt{4+4\text{tg}^2 t}} = \int \frac{2dt}{\cos^2 t\cdot\frac{4\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot 2\cdot\frac{1}{\cos t}} = \int \frac{2dt}{8\frac{\sin^2 t}{\cos t}} = \int \frac{\cos t}{4\sin^2 t}dt = \frac{1}{4}\int \cos t \sin^{-2} t\, dt$$

$$= -\frac{\sin^{-1} t}{4} + C = \frac{-1}{4\sin t} + C = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$$

N.B. $x^2 = 4 \text{ tg}^2 t \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} = \text{tg}^2 t \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + 1 = 1 + \text{tg}^2 t \Leftrightarrow \frac{x^2+4}{4} = \frac{1}{\cos^2 t} \Leftrightarrow \cos^2 t = \frac{4}{x^2+4} \Leftrightarrow 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{4}{x^2+4} \Leftrightarrow \sin^2 t = \frac{x^2+4-4}{x^2+4} = \frac{x^2}{x^2+4}$

Ce dernier résultat peut également être obtenu par le schéma suivant.



$\sin t = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ $\qquad\qquad$ $\cos t = \frac{2}{\sqrt{4+x^2}}$

4.4 *Exercices.*

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx$
2. $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx$
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$
4. $\int \frac{(16-9x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}dx$
5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4(x-3)^2-9)^3}}$
7. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ (subst. : tg x = u)
8. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$ (subst. : $\text{tg}\frac{x}{2} = t$)

5. Intégration par parties.

$$\boxed{\int f\cdot g'\,dx = f\cdot g - \int f'\cdot g\,dx}$$

<u>En effet</u> : $f \,.\, g + C = \int(fg)'\,dx = \int(f'g + fg')\,dx = \int f'g\,dx + \int fg'\,dx \Rightarrow \int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx + C$

5.1 *Exemples.*

1. $\int x \cos x\, dx =$

   $f(x) = x$ $\qquad\qquad$ $f'(x) = 1$

$g'(x) = \cos x \qquad g(x) = \sin x$

$\Rightarrow \int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C$

2. $\int e^x \cos x\, dx =$

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$g'(x) = \cos x \qquad g(x) = \sin x$

$\Rightarrow \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$

Nous allons reprendre le procédé une seconde fois :

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$g'(x) = \sin x \qquad g(x) = -\cos x$

$\Rightarrow \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - [- e^x \cos x - \int -e^x \cos x\, dx]$

$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx \Rightarrow 2 \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C$

$\Rightarrow \int e^x \cos x\, dx = \dfrac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C = e^x \dfrac{\sin x + \cos x}{2} + C$

5.2 Exercices.

1. $\int x\, e^{2x}\, dx$
2. $\int x^2\, e^{-x}\, dx$
3. $\int x \ln x\, dx$
4. $\int x^2 \ln x\, dx$
5. $\int \dfrac{\ln x}{x} dx$
6. $\int \ln x\, dx$
7. $\int (\ln x)^3\, dx$
8. $\int e^{3x} \cos x\, dx$
9. $\int x^3 (\ln x)^2\, dx$
10. $\int x^4 (\ln x)^2\, dx$
11. $\int \dfrac{\ln x}{x^2} dx$
12. $\int x \sin 4x\, dx$
13. $\int x^3 \cos 2x\, dx$
14. $\int x \sin x \cos x\, dx$
15. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$
16. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$
17. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$
18. $\int e^{\arcsin x}\, dx$

6. Intégration par décomposition en fractions simples.

6.1 Fractions de polynômes : notions.

6.1.1 Fractions de polynômes propres et impropres :

<u>Définition :</u>

Une fraction de polynômes $\dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}$ est dite propre ssi $\deg p_1 < \deg p_2$

Elle est dite impropre dans le cas contraire c.-à-d. si $\deg p_1 \geq \deg p_2$

<u>Propriété :</u>

Toute fraction de polynômes impropre peut être décomposée en la somme d'un polynôme et d'une fraction de polynômes propre.

<u>Exemple :</u>

Soit la fraction de polynômes $\dfrac{p_1(x)}{p_2(x)} = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 3x - 5}{x^2 - x - 6}$

Effectuons la division Euclidienne du numérateur par le dénominateur

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +3x & -5 & x^2-x-6 \\ \cline{6-6}
-(x^4 & -x^3 & -6x^2) & & & x^2+x+5 \\ \cline{1-3}
 & x^3 & +4x^2 & +3x & -5 & \\
 & -(x^3 & -x^2 & -6x) & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x^2 & +9x & -5 & \\
 & & -(5x^2 & -5x & -30) & \\ \cline{4-5}
 & & & 14x & +25 &
\end{array}
$$

Par la relation "dividende = diviseur . quotient + reste", nous obtenons :

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{(x^2-x-6)(x^2+x+5)+14x+25}{x^2-x-6} = x^2 + x + 5 + \frac{14x+25}{x^2-x-6}$$

et nous avons bien ainsi transformé une fraction de polynômes impropre en une somme d'un polynôme et d'une fraction de polynômes propre.

6.1.2 Décomposition de fractions polynômes en fractions simples.

On distingue 2 types de fractions simples :

a) <u>1er type</u> : $\dfrac{a}{(bx+c)^n}$ $n \in N°$, $a \neq 0$ Il s'agit donc d'une fraction dont le numérateur est constant, et dont le dénominateur est une puissance positive d'un binôme du premier degré.

b) <u>2ème type</u> : $\dfrac{ax+b}{(cx^2+dx+e)^n}$ $n \in N°$ Le numérateur est un binôme du premier degré et le dénominateur une puissance positive d'un trinôme du second degré indécomposable (dont le réalisant $\rho < 0$)

<u>Exemples :</u>

1. $\dfrac{2}{x-1}$, $\dfrac{5}{2x-3}$, $\dfrac{-3}{(x-2)^3}$, $\dfrac{5}{(3x-4)^4}$ sont des fractions simples du premier type

2. $\dfrac{5}{x^2+1}$, $\dfrac{5x+2}{x^2+4}$, $\dfrac{3x+1}{3x^2+2x+7}$, $\dfrac{5x}{x^2-2x+6}$ sont des fractions simples du second type

3. $\dfrac{x-4}{x+7}$ n'est pas une fraction simple car le numérateur n'est pas une constante

   $\dfrac{x^2-3}{x^2+2x+7}$ n'est pas une fraction simple car le numérateur n'est pas un binôme du premier degré

   $\dfrac{2x-1}{x^2-x-6}$ n'est pas une fraction simple car le dénominateur est décomposable (= (x - 3) (x + 2))

Nous allons maintenant décomposer des fractions polynômes propres en sommes de fractions simples.

Reprenons l'exemple choisi au numéro 7.1.1

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{x^4-2x^2+3x-5}{x^2-x-6}$$

Nous avons pu transformer cette fraction de polynômes en la somme $x^2 + x + 5 + \dfrac{14x+25}{x^2-x-6}$

Il nous reste donc à transformer la fraction propre $\dfrac{14x+25}{x^2-x-6}$ en une somme de fractions simples.

Dans ce but, on factorise le dénominateur.

$$\frac{14x+25}{x^2-x-6} = \frac{14x+25}{(x-3)(x+2)}$$

Il suffit alors de déterminer les coefficients a et b tels que $\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+2}=\frac{14x+25}{(x-3)(x+2)}$

en réduisant au même dénominateur : $\frac{a(x+2)+b(x-3)}{(x-3)(x+2)}=\frac{14x+25}{(x-3)(x+2)}$

et donc a (x+2) +b (x-3) = 14x + 25

En donnant à x successivement les valeurs -2 et 3 , on obtient :

si x = -2 : -5b = - 3 $\Rightarrow$ b = 3/5

si x = 3 : 5a = 67 $\Rightarrow$ a = 67/5

$$\Rightarrow \frac{x^4-2x^2+3x-5}{x^2+x+5} = x^2 + x + 5 + \frac{14x+25}{x^2-x-6} = x^2 + x + 5 + \frac{67/5}{x-3}+\frac{3/5}{x+2}$$

<u>En général : marche à suivre</u>

1. si $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ est impropre (c-à-d si deg $p_1 \geq$ deg p_2) alors on divise $p_1$par p_2 (division euclidienne) et on obtient

   alors la somme d'un polynôme et d'une fraction de polynôme propre. $\frac{p_1}{p_2} = q + \frac{r}{p_2}$

2. sinon, on décompose la fraction $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ (ou $\frac{r}{p_2}$) en une somme de fractions simples.

   Pour cela,
   a) factoriser au maximum le dénominateur.
   b) prendre comme dénominateurs des différentes fractions simples, tous les facteurs du dénominateur de la fraction initiale.
   c) Afin de déterminer les différents coefficients des numérateurs, réduire au même dénominateur et identifier les numérateurs en donnant à x différentes valeurs bien choisies.

6.1.3 Applications : décomposer en fractions simples (s'il y a lieu):

1. $\frac{5}{(3x-2)^2}$, $\frac{x+4}{x^2+1}$ ...... sont des fractions simples, donc aucune décomposition n'est nécessaire.

2. $\frac{3x+1}{x^2-x-2}$ est une fraction propre, donc il suffit de la décomposer en somme de fractions simples.

   le dénominateur x^2 - x - 2 se factorise en (x - 2) (x + 1) (par la formule de factorisation d'un trinôme du second degré ax^2+ bx + c = a (x - 2) (x + 1))

   Nous décomposons $\frac{3x+1}{x^2-x-2}=\frac{3x+1}{(x-2)(x+1)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+1}$

   En réduisant au même dénominateur : $\frac{3x+1}{(x-2)(x+1)} = \frac{a(x+1)+b(x-2)}{(x-2)(x+1)}$

   Et donc a(x + 1) + b (x - 2) = 3x + 1
   si x = 2 : 3a = 7 $\Rightarrow$ a = 7/3
   si x = - 1 : - 3b = - 2 $\Rightarrow$ b = 2/3
   Et donc $\frac{3x+1}{(x-2)(x+1)}=\frac{7/3}{x-2}+\frac{2/3}{x+1}$

3. $\frac{3x^3-5x+2}{(x+1)^2}$ est une fraction impropre. Par la division euclidienne, nous obtenons :

   $\frac{3x^3-5x+2}{(x+1)^2}$ = 3x - 6 + $\frac{4x+8}{(x+1)^2}$

   La nouvelle fraction obtenue est une fraction propre que nous décomposons :

$$\frac{4x+8}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)+b}{(x+1)^2}$$

$\Rightarrow$ 4x + 8 = a(x + 1) + b

si x = - 1 : b = 4 et si x = 0 : 8 = a + b $\Rightarrow$ a = 4

Et nous avons donc finalement :

$$\frac{3x^3-5x+2}{(x+1)^2} = 3x - 6 + \frac{4}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}$$

6.2 Application au calcul d'intégrales.

Lorsque nous avons à calculer l'intégrale d'une fraction de polynômes, nous la décomposerons d'abord en fractions simples selon la marche à suivre ci-dessus, et ensuite calculerons les intégrales de chaque fraction.

Reprenons toujours notre premier exemple :

soit à calculer $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+3x-5}{x^2+x+5}\,dx = \int\left(x^2+x+5+\frac{67/5}{x-3}+\frac{3/5}{x+2}\right)dx$

$\displaystyle = \int (x^2 + x + 5)\,dx + \int \frac{67/5}{x-3}\,dx + \int \frac{3/5}{x+2}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{67}{5}\ln|x-3| + \frac{3}{5}\ln|x+2| + C$

6.3 Exercices.

1. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)}\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$
7. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+1}{(x^2-1)(x-2)^2}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^3+x^2+2}{x^3-x^2+x-1}\,dx$
10. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$
11. $\displaystyle\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{x^5-4x^4+5x^3+2x-5}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}\,dx$
13. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x+\cos^2 x}\,dx$

    méthode : 1) subst. : t = cos x
    2) décomp. en fractions simples.
14. (*) $\displaystyle\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx$

7. Exercices divers.

Nous avons maintenant envisagé les principales méthodes d'intégration. Il est à remarquer que certaines primitives ne peuvent être calculées analytiquement par aucune de ces méthodes. C'est le cas par exemple d'une intégrale telle que $\int e^{-x^2}\,dx$

Lorsque nous rencontrerons ce genre de situation dans une application numérique (que nous envisagerons dans le chapitre des applications des intégrales), nous aurons recours à un logiciel de calcul tel que géogébra ou à des tables numériques (nous reviendrons sur ce point dans le chapitre des variables aléatoires).

7.1 Série 1

1. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}}\,dx$
3. $\displaystyle\int \ln 2x\,dx$
4. $\displaystyle\int (e^x+1)^3 e^x\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$

6. $\int e^x \cos 2x\, dx$

7. $\int \frac{dx}{1+3x^2}$

8. $\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}} dx$

9. $\int \frac{\text{tg } x}{\cos^3 x} dx$

10. $\int x^3 \sin x\, dx$

11. $\int x\sqrt{x-1}\, dx$

12. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

13. $\int e^{\arccos x} dx$

14. $\int \sqrt{\sin x} \cos x\, dx$

15. $\int x (x - 4)^3 dx$

16. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

17. $\int \frac{x dx}{(x-1)(x+1)^2}$

18. $\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x}$

19. $\int \frac{3dx}{\sqrt{5-x^2}}$

20. $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}} dx$

21. $\int \frac{dx}{x^2-4}$

22. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

23. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

24. $\int \sin^2 x\, dx$

25. $\int \sin^3 x\, dx$

26. $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$

7.2 Série 2

1. $\int e^{3x - 1} dx$

2. $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} dx$

3. $\int \frac{x^2-1}{x^2} dx$

4. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

5. $\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx$

6. $\int \frac{x}{3x^2-5} dx$

7. $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3} dx$

8. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

9. $\int (x^2 + x + 2) \ln x\, dx$

10. $\int 8x^3\ e^{4x^2} dx$

11. $\int \text{arctg } \sqrt{x}\, dx$

12. $\int \frac{-5x+2}{x^2+4} dx$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^3}}$

14. $\int (5 \sin x - 2 \cos x)\, e^x dx$

15. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

16. $\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx$

17. $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$

18. $\int x^3 \sin x\, dx$

19. $\int \frac{dx}{3x^2+x+1}$

20. $\int \frac{x}{x^4+3} dx =$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}}$

22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$

8. Solutions des exercices.

8.1 N° 2.2

1. $\frac{x^6}{2} - 5x + C$

2. $\frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + 5x + C$

3. $x^5 - x^3 + x^2 - x + C$

4. $\frac{2\sqrt{x^5}}{5} - \cos x + C$

5. $- 5 \cos x - 3 \sin x + C$

6. $3 \sqrt[3]{x} + C$

7. $-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + C$

8. $- 4 \cos x - 3 \text{ arctg } x + C$

9. $\frac{x^5}{5} - 3 x^3 + 27 x + \frac{27}{x} + C$

10. $x - 3\ln |x| + \frac{5}{2x^2} + C$

11. $\frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2} + \sqrt{x} + \frac{4}{9} x^2 \sqrt[4]{x} + C$

12. $\frac{3x}{2} - \frac{5}{2} \ln |x| + C$

13. $4\sqrt{x} - 2\sqrt{x^5} + C$

14. $\frac{5}{2} \arcsin x + C$

15. $2x + \text{tg } x + C$

16. $2\sqrt{x^5} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

17. $5\ln |x| + 3 \cos x - \frac{5}{x} + C$

18. $4\,e^x + \dfrac{5\cdot 2^x}{\ln 2} + C$

19. $4\left(\dfrac{8}{3}\sqrt{x^3} + \dfrac{40}{\sqrt{x}} - \dfrac{10}{\sqrt{x^5}}\right) + C$

20. $5 \sin x + 2 \cos x + C$

21. $2x\sqrt{x} - 5x + C$

22. $\sin x + C$

23. $2\sqrt{x} + \dfrac{4}{3}\sqrt{x^3} + \dfrac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

8.2 N° 3.2

1. $-\dfrac{(1-2x)^4}{8} + C$
2. $2 \sin \dfrac{x}{2} + C$
3. $\dfrac{4}{9}(x^3+2)^{3/4} + C$
4. $\dfrac{\ln\left|1+x^2\right|}{2} + C$
5. $-e^{1/x} + C$
6. $\dfrac{e^{3x}}{3} + C$
7. $e^{x^2} + C$
8. $\ln|x^3+5| + C$
9. $-\dfrac{\cos 4x}{8} - \dfrac{\cos 2x}{4} + C$

8.3 N° 3.4

1. $\dfrac{(x^2-1)^4}{4} + C$
2. $\dfrac{(x^2+x-3)^3}{3} + C$
3. $-\cos x^2 + C$
4. $e^{x^3+3} + C$
5. $-\dfrac{1}{8}(1-2x)^4 + C$
6. $\dfrac{4}{9}(x^3+2)^{3/4} + C$
7. $\sqrt{x^2+1} + C$
8. $\sin(\ln x) + C$
9. $\dfrac{1}{6}\operatorname{tg}(2x^3) + C$
10. $-2\cos\sqrt{x} + C$
11. $x + \ln|\sin x| + C$
12. $\dfrac{(\ln x)^4}{4} + C$
13. $\operatorname{tg} x - 2\ln|\cos x| + C$
14. $\dfrac{3\sin^2 x}{2} + C$
15. $\dfrac{2}{3b}(a+bx)^{3/2} + C$
16. $-\dfrac{1}{b^2}\sqrt{a^2-b^2x^2} + C$
17. $-\ln|1+\cos^2 x| + C$
18. $-\ln\cos^2 x + C$
19. $\ln|1+\sin^2 x| + C$
20. $-\ln|\cos 2x| + C$
21. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} + C$
22. $\dfrac{\sqrt{7}}{7}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{7}} + C$
23. $\dfrac{1}{\sqrt{15}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}}\,x\right) + C$
24. $\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x-1}{2}\right) + C$
25. $\dfrac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\dfrac{6x+1}{\sqrt{11}} + C$
26. $\dfrac{2}{\sqrt{39}}\arctan\left(\dfrac{4x-1}{\sqrt{39}}\right) + C$
27. $\arcsin\dfrac{x}{3} + C$
28. $\arcsin\dfrac{x+2}{2} + C$
29. $\arcsin\dfrac{x-4}{6} + C$
30. $\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| + C$
31. $-\ln\left|\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)\right| + C$

8.4 N° 4.4

1. $\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C$
2. $3\ln\left|\dfrac{3-\sqrt{9-4x^2}}{x}\right| + \sqrt{9-4x^2} + C$
3. $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{9+4x^2}-3}{x}\right| + C$
4. $-\dfrac{1}{80}\dfrac{(16-9x^2)^{\frac{5}{2}}}{x^5} + C$
5. $\dfrac{3}{2}\arcsin(x-1) - \dfrac{1}{2}(x+3)\sqrt{2x-x^2} + C$
6. $-\dfrac{1}{9}\dfrac{x-3}{\sqrt{4x^2-24x+27}} + C$
7. $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$
8. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C$
9. $\dfrac{2}{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} + C$

8.5 N° 5.2

1. $\frac{x\,e^{2x}}{2} - \frac{1}{4}\,e^{2x} + C$
2. $(-x^2 - 2x - 2)\,e^{-x} + C$
3. $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$
4. $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$
5. $\frac{(\ln x)^2}{2} + C$
6. $x\ln x - x + C$
7. $x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C$
8. $\frac{\sin x + 3\cos x}{10}\,e^{3x} + C$
9. $\frac{x^4}{4}\left[(\ln x)^2 - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{8}\right] + C$
10. $\frac{x^5}{5}\ln^2 x - \frac{2}{25}x^5\ln x + \frac{2}{125}x^5 + C$
11. $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$
12. $-x\,\frac{\cos 4x}{4} + \frac{\sin 4x}{16} + C$
13. $\frac{x^3}{2}\sin 2x + \frac{3}{4}x^2\cos 2x - \frac{3}{4}x\sin 2x - \frac{3}{8}\cos 2x + C$
14. $-\frac{x\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + C$
15. $x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln|1 + x^2| + C$
16. $\frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{x}{2} + C$
17. $2\,e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C$
    indic. : chgt de var : $t = \sqrt{x}$ et par parties.
18. $\frac{1}{2}\,e^{\arcsin x}\left(x + \sqrt{1-x^2}\right) + C$
    indic. : chgt de var : $t = \arcsin x$ et par parties.

8.6 N° 6.3

1. $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right| + C$
2. $-\frac{1}{8}\ln|x + 1| + \frac{3}{4}\ln|x + 3| - \frac{5}{8}\ln|x + 5| + C$
3. $\frac{1}{3}\ln|(x + 1)(x - 2)^2| + \frac{1}{x+1} + C$
4. $2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C$
5. $\frac{1}{2}\ln|x - 1| - \frac{1}{4}\ln|x^2 + 1| + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x + C$
6. $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + C$
7. $\frac{7}{9}\ln|x - 2| + \frac{1}{3(x-2)} - \frac{1}{2}\ln|x - 1| - \frac{5}{18}\ln|x + 1| + C$
8. $x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x + C$
9. $\frac{x^2}{2} - x + \ln|x - 1| - \ln|x^2 + 1| + C$
10. $\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6}\ln|x - 1| - \frac{1}{2}\ln|x + 1| + \frac{16}{3}\ln|x + 2| + C$
11. $\frac{x^2}{2} - \frac{8}{x-2} - \frac{11}{(x-2)^2} + C$
12. $\frac{x^2}{2} + \frac{21}{25}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - \frac{19}{25}\mathrm{arctg}\,x - \frac{7}{5(x-2)} + C$
13. $-\ln|\cos x| + \ln|1 + \cos x| + C$

14. $\ln\left|\dfrac{1+\text{tg}\,\frac{x}{2}}{1-\text{tg}\,\frac{x}{2}}\right| + C = \ln\left|\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C$

15. $\ln|\sqrt{x^2+1} + x| + C$

16. $\ln|x+1| - \dfrac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\arctan\dfrac{x+1}{\sqrt{2}} + C$

8.7 N° 7.1 : Exercices divers, série 1

1. $\text{arctg}\, e^x + C$
2. $2\sqrt{x} + \dfrac{6}{5}\sqrt{x^5} + 2\sqrt{x^3} + \dfrac{2}{7}\sqrt{x^7} + C$
3. $x \ln(2x) - x + C$
4. $\dfrac{(e^x+1)^4}{4} + C$
5. $\dfrac{\ln^4 x}{4} + C$
6. $\dfrac{e^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) + C$
7. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\,\sqrt{3}\,x + C$
8. $\dfrac{3}{4}(x^2 + 6x)^{2/3} + C$
9. $\dfrac{1}{3\cos^3 x} + C$
10. $x\cos x\,(6 - x^2) + \sin x\,(3x^2 - 6) + C$
11. $\dfrac{2}{3}x\sqrt{(x-1)^3} - \dfrac{4}{15}\sqrt{(x-1)^5} + C$

    ou $\dfrac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \dfrac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C$

    $= \sqrt{(x-1)^3}\,\dfrac{6x+4}{15} + C$
12. $\dfrac{2}{3}\sqrt{x+1}\,(x-2) + C$
13. $e^{\arccos x}\,\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{2} + C$
14. $\dfrac{2}{3}(\sin x)^{3/2} + C$
15. $\dfrac{(x-4)^4}{5}(x+1) + C$
16. $-\dfrac{1}{x}(\ln x + 1) + C$
17. $-\dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C$
18. $\ln|x| - \ln|x-1| - \dfrac{1}{x-1} + C$

    $= \ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right| - \dfrac{1}{x-1} + C$
19. $3\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{5}} + C$
20. $-\sqrt{4x-x^2} + 4\arcsin\dfrac{x-2}{2} + C$
21. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| + C$
22. $\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C =$

    $\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} - \dfrac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)\right| + C$
23. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\,\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$
24. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C$
25. $-\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3} + C$
26. $\dfrac{\sin^3 x}{3} - \dfrac{\sin^5 x}{5} + C$

8.8 N° 7.2 : exercices divers, série 2

1. $\dfrac{1}{3}e^{3x-1} + C$
2. $2\sqrt{x}\left(1 + \dfrac{2x}{3} + \dfrac{x^2}{5}\right) + C$
3. $x + \dfrac{1}{x} + C$
4. $x\,\text{tg}\,x + \ln|\cos x| + C$
5. $-\dfrac{\cos^5 x}{5} + \dfrac{\cos^7 x}{7} + C$
6. $\dfrac{1}{6}\ln|3x^2 - 5| + C$
7. $\dfrac{-2x^2-1}{4(x^2+1)^2} + C$

8. $\frac{2}{3}\sqrt{x+1}$ (x - 2) + C

9. $\ln x \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)-\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{4}-2x+C$

10. $\left(x^2-\frac{1}{4}\right)e^{4x^2}$ + C

11. (x + 1) arctg $\sqrt{x}$ - $\sqrt{x}$ + C

12. $\frac{-5}{2}$ ln(x^2 + 4) + arctg $\frac{x}{2}$ + C

13. $\frac{2}{\sqrt{3-x}}$ + C

14. $\left(\frac{3}{2}\sin x-\frac{7}{2}\cos x\right)$ e^x + C

15. $2\sqrt{\cos x}\left(-1+\frac{\cos^2 x}{5}\right)$ + C

16. ln 2x - ln 2 ln (ln 4x) + C

17. $-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}$ + C

18. cos x (- x^3 + 6x) + sin x (3x^2 - 6) + C

19. $\frac{2\sqrt{11}}{11}$ arctg $\frac{6x+1}{\sqrt{11}}+C$

20. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ arctan $\frac{x^2}{\sqrt{3}}$ + C

21. arcsin $\frac{x+6}{8}$ + C

22. $-\frac{1}{2}$ arcsin $\frac{1}{x^2}$ + C