XI. Différentielles et intégrales définies : notions de base

1. Différentielle

soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \to y = f(x)$ et sa dérivée : $f'(x) = y'$
Considérons un accroissement de la variable x : Δx

1.1 Définition - notation

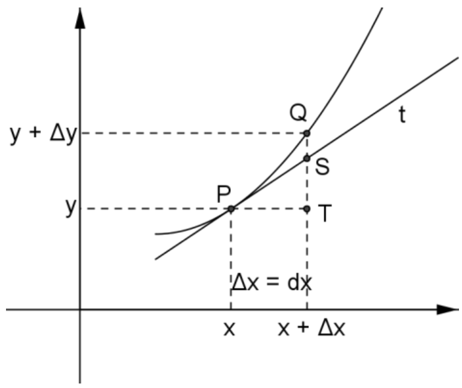
On appelle différentielle de f(x), la fonction df(x) égale au produit $f'(x)\,\Delta x$
$df(x) = f'(x)\,\Delta x$ ou encore $dy = y'\,\Delta x$

Cas particulier

si on considère la fonction identique $f(x) = x$ $\quad f'(x) = 1$ et dans ce cas : $df(x) = dx = 1\,\Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$

et l'égalité $df(x) = f'(x)\,\Delta x = f'(x)\,dx$ ou $dy = y'\,dx \Rightarrow f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$ ou $y' = \dfrac{dy}{dx}$

1.2 Interprétation géométrique



Soit G le graphe d'une fonction f(x) et P(x, y) : un de ses points.
Traçons la tangente à la courbe en ce point.
A l'abscisse $x + \Delta x$, correspondent 2 points :

- l'un sur la courbe : $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$
- l'autre sur la tangente : $S(x+\Delta x, Y)$

La droite PS a donc pour coefficient angulaire $f'(x) = \dfrac{|ST|}{|PT|} = \dfrac{|ST|}{\Delta x}$

Donc : $f'(x) = \dfrac{|ST|}{\Delta x} \Rightarrow |ST| = f'(x)\,.\,\Delta x = f'(x)\,.\,dx$

dy est donc la mesure du segment [ST] sur le graphique tandis que Δy est la mesure de QT.
La différentielle df(x) est donc "l'accroissement mesuré sur la droite tangente au point (x, f(x)) entre x et $x + \Delta x$"

Des règles de dérivation, on peut tirer immédiatement les règles de différenciation.

Exemple :

$d(f + g)(x) = (f + g)'\,dx = (f' + g')\,dx = f'\,dx + g'\,dx$
$\Rightarrow d(f + g)(x) = df(x) + dg(x)$
de même on trouvera $d(kf(x)) = k\,df(x)$
$d(f.g)(x) = df(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,dg(x)$.........

On peut dire en quelque sorte que la différentielle est l'accroissement en première approximation de f entre l'abscisse x et l'abscisse $x + \Delta x$

1.3 Applications.

1.3.1 Exemple

De combien augmenterait la circonférence de la terre si son rayon augmentait de 1 m?
Solution : Soit la longueur de la circonférence de rayon x : $2\pi x = f(x)$
La valeur initiale du rayon est donc le rayon de la terre.
Le petit accroissement de x : dx = 1m. A ce petit accroissement de x correspond l'accroissement de la longueur de la circonférence : $df(x) = f'(x)\,.\,dx = (2\pi x)'\,.\,dx = 2\pi\,.\,dx$
Comme $dx = 1m \Rightarrow df(x) = 2\pi\,.\,1m = 6{,}28$ m

1.3.2 Exercices.

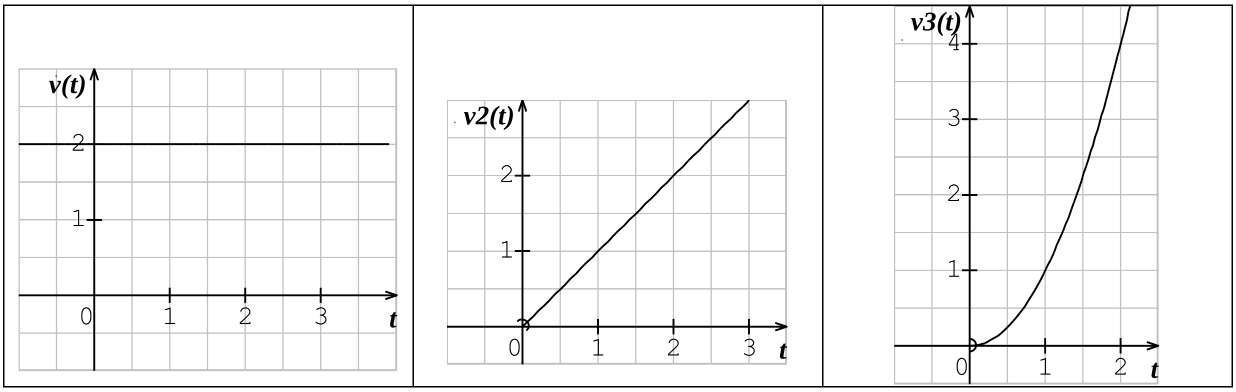
1. Un bloc de glace sphérique fond et voit son rayon passer de 10 cm à 9,8 cm. Quel est l'accroissement (négatif) en première approximation du volume de glace ? Comparer cette approximation avec l'accroissement réel sol : approx.: – 251,32 cm^3 exact : – 246,33 cm^3

2. Quel est l'accroissement en première approximation de la surface d'un carré si le côté du carré est initialement de 15 cm et si ce côté augmente de 3% par dilatation. Comparer cette approximation avec l'accroissement réel. sol : dA = 13.5 cm^2 ΔA = 13,7025 cm^2

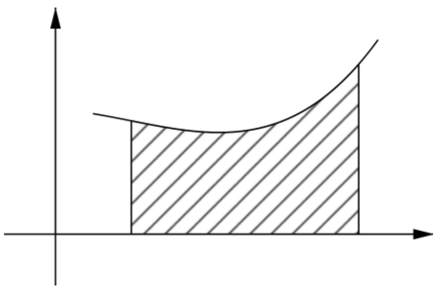
2. Intégrales définies

2.1 Exemple introductif

Les graphiques tracés dans le tableau ci-dessous représentent la vitesse d'un mobile en fonction du temps.
Les temps sont exprimés en secondes et les vitesses en mètres par seconde.
Les expressions analytiques des fonctions qui expriment la vitesse en fonction du temps sont respectivement :
v_1 (t) = 2 v_2 (t) = t et v_3 (t) = t^2
Dans chaque cas, on demande de déterminer (le plus précisément possible) la distance parcourue durant les 2 premières secondes du mouvement.

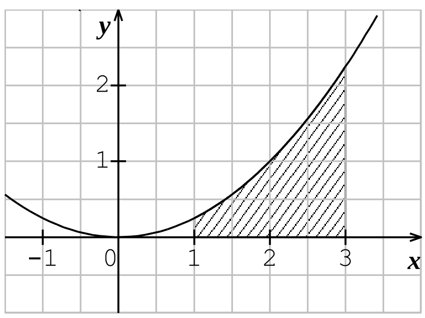


2.2 Généralisation



A partir des exemples précédents, nous voyons la nécessité de pouvoir calculer l'aire d'une surface limitée par le graphe d'une fonction, l'axe des abscisses et deux droites verticales d'équations respectives x = a et x = b, c.-à-d. des aires du type de celle du graphique ci-contre.
Nous tâcherons d'abord d'approcher cette aire, et ensuite, nous établirons un raisonnement général qui permettra de la calculer exactement.

3. Méthode des rectangles.

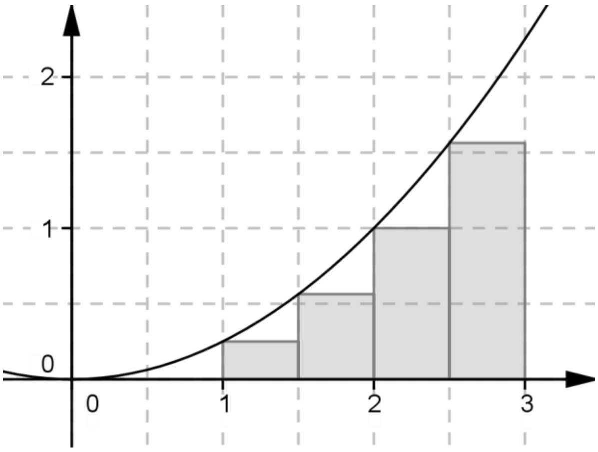


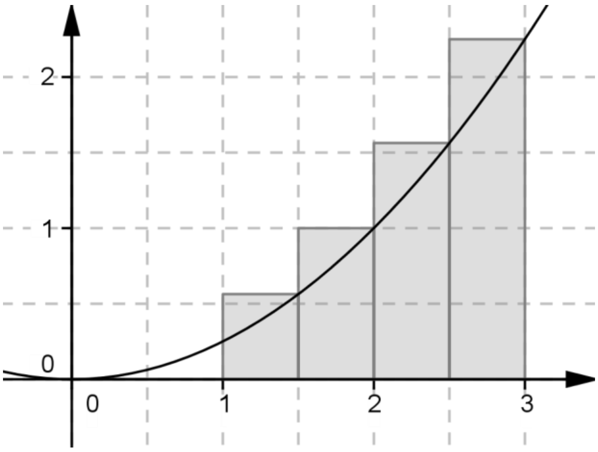
Considérons par exemple la fonction y = $\dfrac{x^2}{4}$

Soit à calculer l'aire limitée par cette fonction, l'axe des x et les droites d'équation x = 1 et x = 3

3.1 Approximation par 4 rectangles : somme inférieure et somme supérieure.

Si nous subdivisons l'intervalle [1, 3] en 4 sous-intervalles de même longueur, nous pouvons approximer l'aire cherchée par une somme de 4 rectangles construits sur ces intervalles. Nous pouvons même obtenir 2 types d'approximation : la première, inférieure à l'aire cherchée est obtenue en construisant des rectangles dont la hauteur est l'image de l'origine de l'intervalle et la seconde, supérieure à l'aire cherchée est obtenue en construisant des rectangles dont la hauteur est l'image de l'extrémité de l'intervalle.



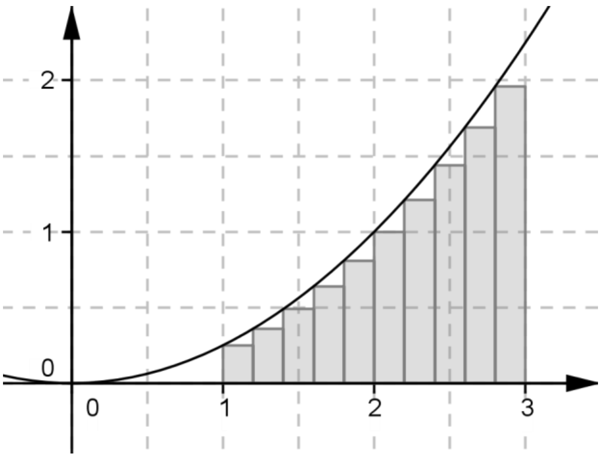


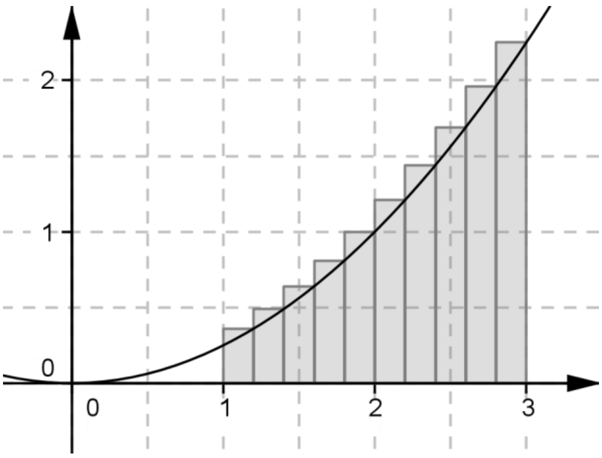
$\underline{S}_4 = 0.5 . \left[\frac{1}{4}+\frac{1.5^2}{4}+\frac{2^2}{4}+\frac{2.5^2}{4}\right] = 1.6875$

$\overline{S}_4 = 0.5 \left[\frac{1.5^2}{4}+\frac{2^2}{4}+\frac{2.5^2}{4}+\frac{3^2}{4}\right] = 2.6875$

3.2 Approximation par 10 rectangles

L'approximation deviendra d'autant meilleure que le nombre de rectangles est grand. Si nous reprenons l'exemple précédent avec une découpe en 10 rectangles, les calculs montrent l'amélioration de la précision.

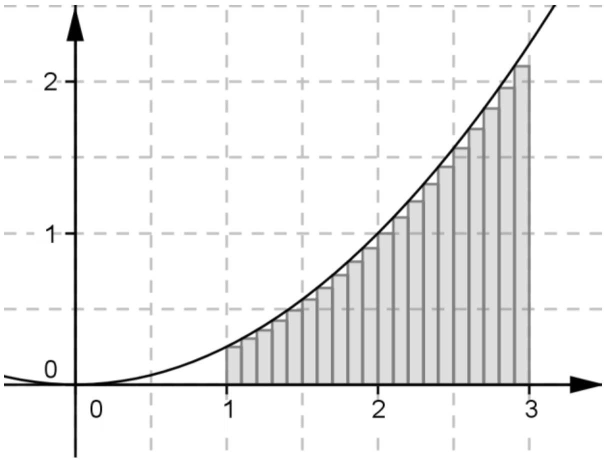


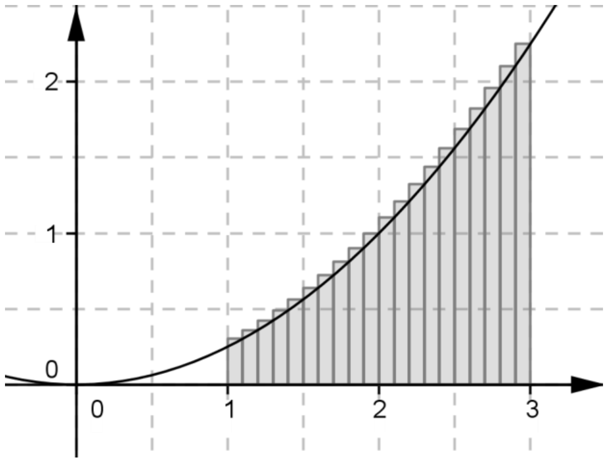


$\underline{S}_{10} = 0.2 . \left[\frac{1}{4}+\frac{1.2^2}{4}+\frac{1.4^2}{4}+\ldots+\frac{2.8^2}{4}\right] = 1.97$

$\overline{S}_{10} = 0.2 \left[\frac{1.2^2}{4}+\frac{1.4^2}{4}+\frac{1.6^2}{4}+\ldots\frac{3^2}{4}\right] = 2.37$

3.3 Approximation par 20 rectangles





$\underline{S}_{20} = 0.1.\left[\frac{1}{4}+\frac{1.1^2}{4}+\frac{1.2^2}{4}+\ldots+\frac{2.9^2}{4}\right] = 2.07$ $\qquad$ $\overline{S}_{20} = 0.1\left[\frac{1.1^2}{4}+\frac{1.2^2}{4}+\frac{1.3^2}{4}+\ldots+\frac{3^2}{4}\right] = 2.27$

Avec 100 et 1000 rectangles, nous obtenons respectivement $\underline{S}_{100} = 2.15$ et $\overline{S}_{100} = 2.19$, $\underline{S}_{1000} = 2.16$ et $\overline{S}_{1000} = 2.17$

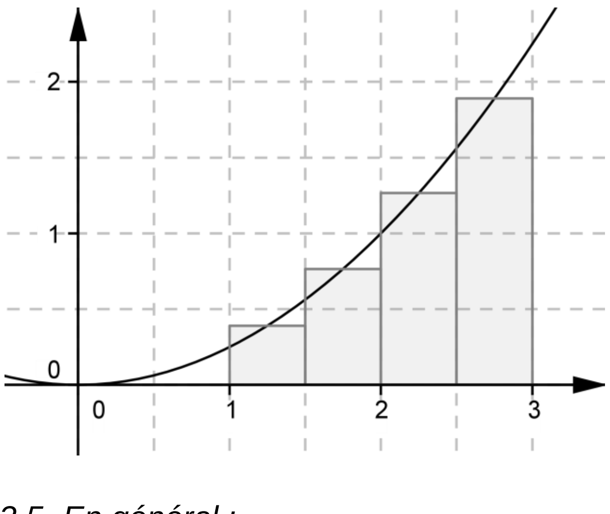
Ces sommes semblent converger vers une valeur unique représentant la mesure de l'aire de la surface cherchée. Elles portent le nom de <u>somme supérieure de Darboux et somme inférieure de Darboux</u>.

En Général : si $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n$ la fonction est dite intégrable au sens de Riemann sur [a, b].

Cette limite est alors notée $\int_a^b f(x)dx$

3.4 Approximation par des rectangles intermédiaires

Un autre moyen d'approximer l'aire cherchée est de construire des rectangles dont la hauteur est l'image du point milieu de l'intervalle.
Reprenons l'exemple précédent avec une découpe en 4 rectangles :



L'approximation de l'aire ainsi obtenue vaut :

$$0.5 .\left[\frac{1.25^2}{4}+\frac{1.75^2}{4}+\frac{2.25^2}{4}+\frac{2.75^2}{4}\right] = 2.15625$$

Cette manière de procéder permet de se rapprocher plus rapidement de la valeur exacte : en quelque sorte, l'aire "prise en trop" est compensée par l'aire "qui n'est pas prise".

Par cette méthode, une découpe en 20 rectangles nous donne une évaluation de l'aire = 2.16625

3.5 En général :

Pour évaluer l'aire comprise entre le graphe de la fonction y = f(x), l'axe des x et les droites d'équation x = a et x = b, on subdivise l'intervalle [a , b] en n intervalles élémentaires

$[X_0 , X_1]$ de longueur ΔX_1 et dont le milieu est a_1
$[X_1 , X_2]$ de longueur ΔX_2 et dont le milieu est a_2
$[X_2 , X_3]$ de longueur ΔX_3 et dont le milieu est a_3
....

$[X_{n-1}, X_n]$ de longueur ΔX_n et dont le milieu est a_n
avec $X_0 = a$ et $X_n = b$

aire $\cong f(a_1)\,\Delta X_1 + f(a_2)\,\Delta X_2 + ...+ f(a_i)\,\Delta X_i + ...+ f(a_n)\,\Delta X_n = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta X_i$

et si la fonction est intégrable au sens de Riemann, aire = $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta X_i$

Pour augmenter la précision, il suffit d'augmenter le nombre d'intervalles.
Suivant la courbure du graphe, on aura une approximation par le haut ou par le bas.

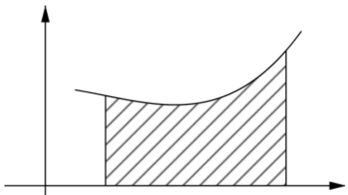
4. Définition de l'intégrale définie

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i\right)$ où x_0, x_1, …x_i,…x_n constitue une découpe de l'intervalle [a, b] avec $x_0 = a$ et $x_n = b$ et $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

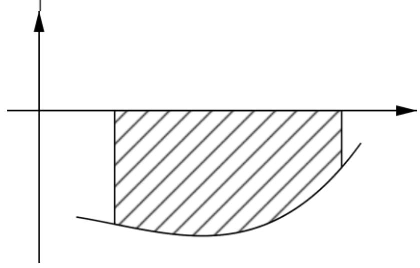
Remarques :

- $\int$ est un rappel du signe $\sum$
- $\int_a^b$ indique les bornes de l'intervalle
- $\int_a^b f(x)dx$ car les éléments de la somme sont des aires de rectangles de base Δx_i et de hauteur $f(a_i)$

5. Intégrale définie et aire.

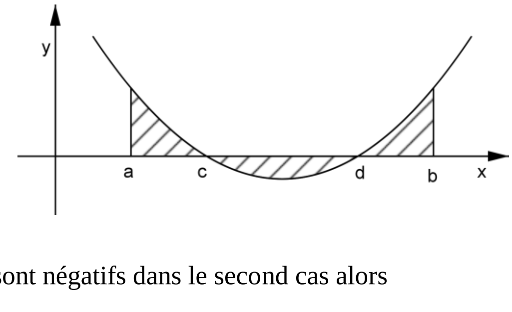


a) L'aire de la surface hachurée = $\int_a^b f(x)dx$



b) L'aire de la surface hachurée = $-\int_a^b f(x)dx$

car tous les f(x) sont négatifs, or une aire est toujours positive.



c) L'aire de la surface hachurée = $\int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$

Remarques.

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ Ceci se justifie par le fait que les éléments dx sont négatifs dans le second cas alors qu'ils sont positifs dans le premier.
2. Si $c \in [a, b]$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
3. x est une variable muette : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

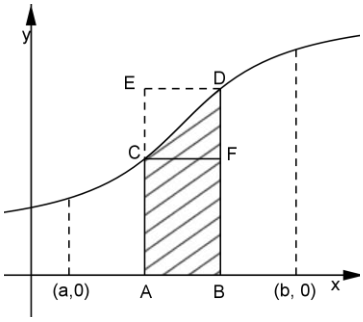
6. Intégrales définies et primitives : théorème fondamental

Considérons la fonction A : [a , b] $\to$ R tq $x \to \int_a^x f(t)dt$

$A(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une intégrale dont les bornes ne sont pas réellement définies (a et x) et où x est la variable.

Nous allons montrer que la dérivée de cette fonction vaut f(x) : $A'(x) = f(x)$

Plaçons-nous dans le cas d'une fonction continue, croissante et positive dans [a , b]
A(x) est donc la fonction qui mesure l'aire comprise entre le graphe de cette fonction, l'axe des abscisses et les verticales en a et en x



Soit : $a < x < x + \Delta x$ ($\Delta x > 0$)
a est donc une abscisse fixée et x une abscisse variable.
A(x, 0) et B(x + Δx, 0)
L'aire hachurée = $A(x + \Delta x) - A(x) = \Delta A$

Graphiquement, nous voyons :
Aire(rectangle ABFC) < $\Delta A(x)$ < Aire(rectangle ABDE)
$\Leftrightarrow \Delta x \,.\, f(x) < \Delta A(x) \leq \Delta x \,.\, f(x + \Delta x)$

$\Leftrightarrow f(x) < \dfrac{\Delta A(x)}{\Delta x} < f(x+ \Delta x)$ (car $\Delta x > 0$)

Si $\Delta x \to 0$ alors $x + \Delta x \to x$ et $f(x + \Delta x) \to f(x)$ (car f est continue)

Nous avons alors : $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x) \leq \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta A(x)}{\Delta x} \leq \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) \Leftrightarrow f(x) \leq \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta A(x)}{\Delta x} \leq f(x)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta A(x)}{\Delta x} = f(x) \Leftrightarrow A'(x) = f(x)$

Nous admettrons que cette conclusion reste vraie pour les autres cas (fonctions décroissantes (et/ou) négatives) mais cependant continues : une discontinuité ne pourrait qu'empêcher un calcul d'aire.
A(x) est appelée primitive de f(x) c.-à-d. une fonction dont la dérivée vaut f(x)

<u>Exemples</u> :
x^2 est une primitive de 2x car $(x^2)' = 2x$
$x^2 + 5$ est une primitive de 2x car $(x^2 + 5)' = 2x$
<u>Notation</u> : $\int 2x\, dx = x^2 + C$
x^3 est une primitive de $3x^2$ car $(x^3)' = 3x^2$
$x^3 - 3$ est une primitive de $3x^2$ car $(x^3 - 3)' = 3x^2$
<u>Notation</u> : $\int 3x^2 dx = x^3 + C$

Une primitive d'une fonction donnée ne semble donc pas être unique.

7. Calcul de $\int_a^b f(x)dx$

On sait $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $A'(x) = f(x) \Rightarrow A(x) = F(x) + C$ avec F(x) tel que $F'(x) = f(x)$ (c-à-d F(x) est une primitive de f(x))
On voudrait déterminer la valeur de C.

Si x = a : $A(a) = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = - F(a) \Rightarrow S(x) = F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$

et donc si x = b : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

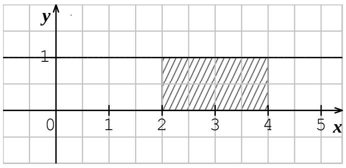
On admettra que cette conclusion reste valable avec pour seule condition f continue sur [a , b]

Conclusion.

Si f continue sur [a , b] F une primitive de f (c.-à-d. $F'(x) = f(x)$) alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$

8. Applications : calculs d'aires

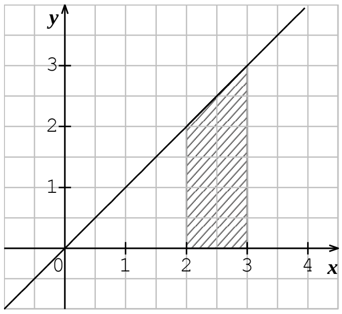
8.1 Exemple 1



$$\int_2^4 1 \cdot dx = \left[x\right]_2^4 = 4 - 2 = 2$$

en effet : l'aire du rectangle ainsi défini = L . l = 2 . 1 = 2

8.2 Exemple 2

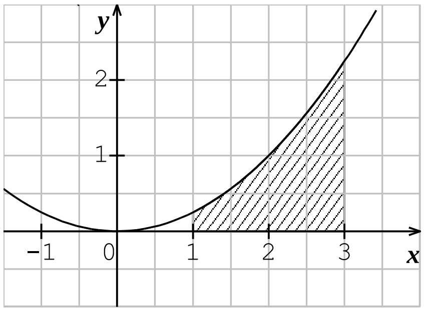


$$\int_2^3 x \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$$

Et nous avons bien l'aire hachurée = surface d'un trapèze =

$$\frac{B+b}{2} \cdot H = \frac{3+2}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$$

8.3 Exemple 3



Reprenons l'exemple du début de ce chapitre :

$$\int_1^3 \frac{x^2}{4} dx = \left[\frac{x^3}{12}\right]_1^3 = \frac{3^3}{12} - \frac{1^3}{12} = \frac{26}{12} \cong 2{,}1666\ldots$$

Et nous trouvons ainsi enfin la valeur exacte de cette aire approximée de diverses manières au début du chapitre.

8.4 Conclusion.

Pour déterminer d'autres aires de ce type, nous devrons être capables de déterminer des primitives de fonctions plus complexes. Nous allons maintenant considérer quelques recherches de primitives de base afin de pouvoir les utiliser dans le calcul d'aires.

9. Primitives.

9.1 Définition :

si F ' (x) = f(x) alors F(x) est une primitive de f(x) $\Leftrightarrow$ F(x) est une intégrale indéfinie de f(x) dx

9.2 Propriétés

Si F(x) est une primitive de f(x) et C une constante alors a) F(x) + C est aussi une primitive de f(x) b) Toute primitive de f(x) est de la forme F(x) + C

En effet :
a) $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x)$ car F(x) est une primitive de f(x) et C une constante.$\Leftrightarrow$ F(x) + C est également une primitive de f(x)
b) Supposons que l'on puisse déterminer une autre primitive de f(x) : soit $F_1(x)$
Nous avons alors $F_1'(x) = F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F_1'(x) - F'(x) = 0 \Leftrightarrow (F_1(x) - F(x))' = 0 \Leftrightarrow F_1(x) - F(x) = C$ (car la seule fonction ayant une dérivée nulle est la fonction constante) $\Leftrightarrow F_1(x) = F(x) + C$ (c.q.f.d)

9.3 Notations

- On a vu : $\int_a^b f(x)\,dx$ se calcule à partir d'une primitive de f(x) : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$
- On notera $\int f(x)\,dx = F(x) + C$: appelée intégrale indéfinie de f(x) dx = l'ensemble de toutes les primitives de f(x) (C est une constante d'intégration.)

9.4 Applications.

Déterminer les primitives suivantes :

1. $\int 2x\,dx$
2. $\int 6x\,dx$
3. $\int \cos x\,dx$
4. $\int 1\,dx$
5. $\int \frac{dx}{1+x^2}$
6. $\int e^x\,dx$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
8. $\int x^2 dx$
9. $\int 3x^5 dx$

9.5 Généralisation

Les exercices précédents mettent en évidence des "formules d'intégration" que nous développerons dans un chapitre ultérieur. Dans un premier temps, nous retiendrons surtout

$\int 0\,dx = C$	$\int a\,dx = ax + C$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\forall\, n \in R\backslash\{-1\}$

9.6 Intégration par décomposition.

On remarque aisément :

$$\boxed{\int (m\,.f(x)+ p.g(x))\,dx = m\int f(x)\,dx + p\int g(x)\,dx}$$

Ceci est la base de la première méthode d'intégration appelée intégration par décomposition.

Application : calculer les primitives suivantes :

1. $\int (4x^3 -5)\,dx$
2. $\int (5x^2 - 3x + 2)\,dx$
3. $\int (5x^3 - 3x^2 + 2x - 1)\,dx$

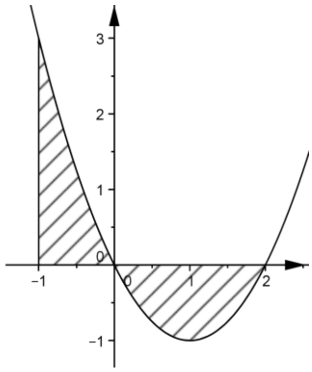
10. Application au calcul d'aires

10.1 Applications de base

1. Calculer l'aire comprise entre la parabole $P \equiv y = -x^2 - 6 + 5x$, l'axe des x et entre les racines. sol : $\frac{1}{6}$
2. Même question pour la parabole $P \equiv y = 4x^2 - 5x - 6$ sol : $\frac{1331}{96}$
3. Calculer l'aire comprise entre la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$, l'axe des abscisses et la droite verticale d'équation $x = 4$ sol : $\frac{16}{3}$

10.2 Quelques situations particulières

10.2.1 Calculer et interpréter $\int_{-1}^{2}(x^2-2x)dx$

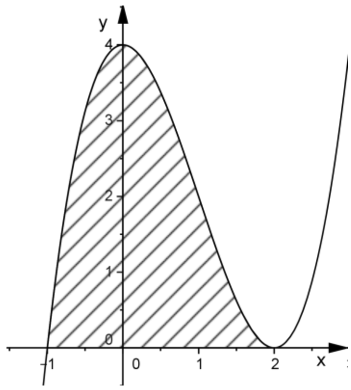


$\int_{-1}^{2}(x^2-2x)dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = (\frac{8}{3} - 4) - (-\frac{1}{3} - 1) = 0$: ce qui ne signifie pas que l'aire hachurée est nulle. En effet, celle-ci vaut :

$\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx - \int_{0}^{2}(x^2-2x)dx = ... = \frac{8}{3}$

10.2.2 Calculer et interpréter $\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx$

$\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx = \left[\frac{x^4}{4}-x^3+4x\right]_{-1}^{2} = (\frac{16}{4} - 8 + 8) - (\frac{1}{4} + 1 - 4) = \frac{27}{4}$



Pour interpréter graphiquement cette intégrale définie, nous sommes amenés à réaliser une étude de la fonction polynôme $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ $\quad$ $f''(x) = 6x - 6$

x		-1		0		1		2	
f ' (x)	+	+	+	0	-	-	-	0	+
f '' (x)	-	-	-	-	-	0	+	+	+
f (x)	↗	↗	↗	max	↘	↘	↘	min	↗
f (x)	∩	∩	∩	∩	∩		∪	∪	∪

10.2.3 Calcul d'une aire comprise entre 2 courbes.

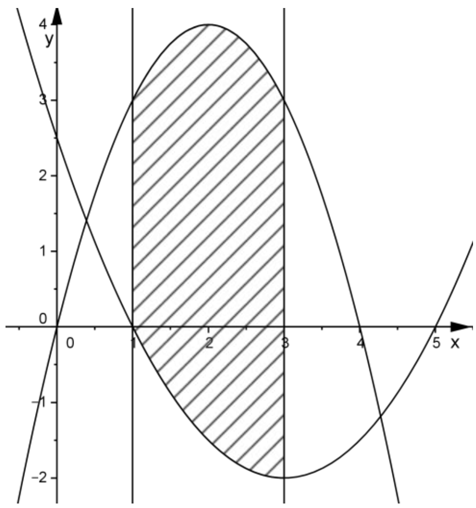
Soit à calculer l'aire limitée par les graphes des fonctions

$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 5)$ et $g(x) = -x^2 + 4x$

et par les droites d'équation x = 1 et x = 3

$A = \int_{1}^{3}(g(x) - f(x))\,dx = \int_{1}^{3}(-\frac{3}{2}x^2+7x-\frac{5}{2})\,dx =$

$\left[-\frac{3}{2}\frac{x^3}{3}+7\frac{x^2}{2}-\frac{5}{2}x\right]_{1}^{3} = 10$



Il s'agit de faire une somme infinie d'aires de rectangles de largeur dx et de hauteur (g(x) – f(x)) (la différence entre la plus grande fonction et la plus petite)

10.2.4 Exercices.

1. Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ Déterminer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x et entre les racines.
sol : 8
2. Soient les paraboles $P_1 \equiv y = x^2$ et $P_2 \equiv y = - x^2 + 4$. Calculer l'aire comprise entre ces deux paraboles.
sol : $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$
3. Même question pour les paraboles $P_1 \equiv y = -x^2 + 6x$ et $P_2 \equiv y = x^2 - 8x + 20$ Sol : 9
4. Soit $f(x) = x^2 - x - 12$. Déterminer l'aire comprise entre cette courbe et la droite $y = x - 4$. sol : 36
5. Calculer la mesure de l'aire comprise entre les courbes d'équation $y = x$ et $y = 2x^3 + 2x^2 - 3x$
sol : $\frac{37}{6}$
6. Même question pour $y = x^2$ et $y = x^3 + x^2 - 4x$ sol : 8