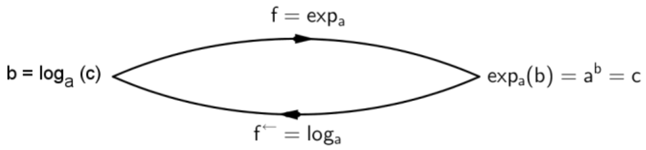
IV. Les fonctions logarithmiques et leurs applications.

1. La fonction logarithmique.

1.1 Définition.

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \rightarrow f(x) = a^x = \exp_a(x)$ ($a > 0$ et $a \neq 1$), appelée fonction exponentielle de base a
La fonction réciproque de f est appelée fonction logarithmique de base a



$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : b \rightarrow f(b) = \exp_a(b) = a^b = c$

$f^{\leftarrow} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : c \rightarrow \log_a(c)$

avec : $\log_a(c) = b \Leftrightarrow c = a^b$

Ce qui nous amène à la définition suivante de la fonction logarithmique de base a :

si $a \in \mathbb{R}_0^+$ et $a \neq 1$:
$\text{Log}_a : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \log_a x = y$ ssi $x = a^y$

1.2 Exemples :

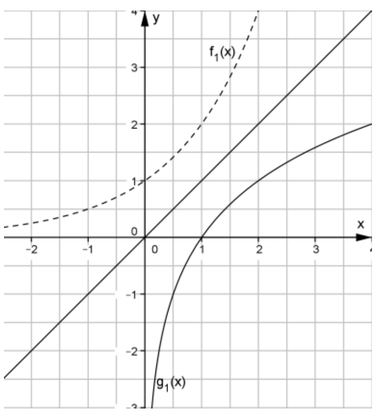
$3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$ $\quad$ $2^{-3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{8} = -3$ $\quad$ $8^{\frac{2}{3}} = 4 \Leftrightarrow \log_8 4 = \frac{2}{3}$

1.3 Exercices : calculer

1. $\log_{10} 1000 =$
2. $\log_{10} 10 =$
3. $\log_a a^x =$
4. $\log_3 27 =$
5. $\log_3 81 =$
6. $\log_{10} 0.01 =$
7. $\log_8 2 =$
8. $\log_2 32 =$
9. $\log_5 \frac{1}{625} =$
10. $\log_4 32 =$
11. $\log_9 27 =$
12. $\log_{27} 81 =$
13. $\log_9 243 =$
14. $\log_4 \frac{1}{32} =$

1.4 Graphes des fonctions logarithmiques.

Le graphique de gauche reprend les graphes de $f_1(x) = 2^x$ et $g_1(x) = \log_2(x)$ tandis que le graphique de droite reprend ceux de $f_2(x) = 0.5^x$ et de $g_2(x) = \log_{0.5}(x)$. Remarquons que les graphes de g_1 et g_2 sont obtenus par symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$ des graphes de f_1 et f_2



Observations : $\forall a \in \mathbb{R}_0^+$

Si $a > 1$ (graphique de gauche):
la fonction $\log_a(x)$ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$

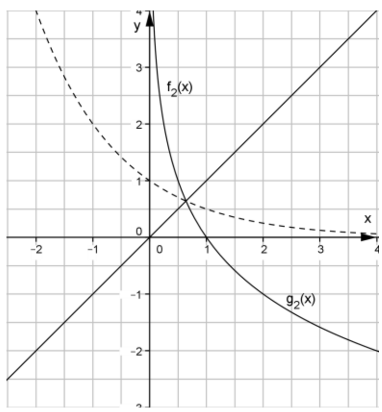
$\lim\limits_{+\infty} \log_a(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \log_a(x) = -\infty \Rightarrow$ AV : $x = 0$

Si $0 < a < 1$: (graphique de droite) :
la fonction $\log_a(x)$ est une fonction strictement décroissante de $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$\lim\limits_{+\infty} \log_a(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \log_a(x) = +\infty \Rightarrow$ AV : $x = 0$



Ces courbes n'admettent aucune asymptote horizontale ou oblique.

Remarque :
1 ne peut pas être une base d'une fonction logarithmique. En effet, la fonction exponentielle de base 1 est une fonction constante ($\forall x \in R : \exp_1(x) = 1$) et sa réciproque n'est donc pas une fonction.

1.5 Les fonctions logarithmiques principales

- *Les logarithmes népériens ou logarithmes en base e.*

Nous avons défini la fonction exponentielle Népérienne : e^x qui est la fonction exponentielle de base e. La fonction logarithme Népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle Népérienne. Elle se note ln x et nous avons donc : $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$

- *Les logarithmes décimaux ou logarithmes en base 10*

Lorsqu'aucune base n'est indiquée, il s'agit de la base 10. Exemple : $\log x = \log_{10} x$

1.6 Propriétés des logarithmes.

$\forall a, b \in R_0^+ \quad a, b \neq 1 \qquad \forall x, y \in R_0^+$:

1. $\log_a 1 = 0 \quad \Leftrightarrow a^0 = 1$
2. $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$

   En effet : soit $\log_a x = p$ et $\log_a y = q \Leftrightarrow x = a^p$ et $y = a^q$

   $\Rightarrow \log_a (x.y) = \log_a a^{p+q} = p + q = \log_a x + \log_a y$
3. $\log_a \frac{1}{x} = - \log_a x$

   En effet : soit $\log_a x = p \Leftrightarrow a^p = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = a^{-p} \Leftrightarrow \log_a \frac{1}{x} = - p = - \log_a x$

   N.B. : Cette valeur est appelée cologarithme de x et désigne le logarithme de l'inverse de x
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

   En effet : $\log_a \frac{x}{y} = \log_a (x.\frac{1}{y}) = \log_a x + \log_a \frac{1}{y} = \log_a x - \log_a y$ (en appliquant les propriétés 2 et 3)
5. $\log_a x^n = n \log_a x$

   En effet : soit $\log_a x = p \Leftrightarrow a^p = x \Leftrightarrow x^n = a^{pn} \Leftrightarrow \log_a x^n = p.n = n \log_a x$
6. $\log_a x = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

   En effet : $y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x \Leftrightarrow \log_b a^y = \log_b x \Leftrightarrow y \log_b a = \log_b x \Leftrightarrow y = \log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$
7. <u>Cas particulier</u> : $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b(a)}$

Nous retiendrons :

$\forall a, b \in R_0^+ \quad a, b \neq 1 \qquad \forall x, y \in R_0^+$:
$\log_a 1 = 0$
$\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
$\log_a \frac{1}{x} = - \log_a x$
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
$\log_a x^n = n \log_a x$
$\log_a x = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ et donc $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b(a)}$

1.7 Exercices :

1. A l'aide de la calculatrice, calculer $\log_2 321$ $\log_8 522$ $\log_7 \frac{5}{121}$
2. Sachant que $\log_{10} a = 2.3$ et $\log_2 10 = 3.32$, sans utiliser les touches "log" ou "ln" de votre calculatrice, calculer $\log_2 a$
3. Décomposer les expressions suivantes en vous servant des propriétés ci-dessus.

   a) $\log_a \sqrt[3]{xyz}$ b) $\log_a \sqrt{x\sqrt{yz}}$ c) $\log \frac{xy^2}{2z}$ d) $\log_a a^2 x^3 \sqrt{y}$

   e) $\log_a x^3 \sqrt{xy\sqrt[3]{z^2}}$ f) $\log \frac{x^2}{x-y}$
4. Exprimer sous forme d'un seul logarithme :

   a) $\log a - \frac{1}{2}\log b + \log c$

   b) $\log 25 - \log 5 - \log 3 - \log 15$

   c) $3 \log 2 - 2 \log 3 + \log 81$

   d) $\frac{1}{3}\ln a + \frac{1}{5}\ln b - \frac{1}{2}\ln c$

   e) $\ln 8 + \ln 27 - \frac{1}{3}\ln 64 - \ln 3$
5. Sachant que $\log_2 x = u$, exprime en fonction de u :

   a) $\log_2 x^2$ b) $\log_2 \sqrt{2x}$ c) $\log_2 \frac{x^3}{64}$ d) $\log_4 \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$
6. Sachant que $\ln 2 = 0.693$, sans faire usage de la touche logarithme de la calculatrice, calculer

   a) $\ln 8$ b) $\ln 0.5$ c) $\ln \frac{1}{32}$ d) $\ln \sqrt[4]{32}$
7. Sachant que $\ln 2 = 0.693$ et $\ln 3 = 1.099$ et $\ln 5 = 1.609$, sans faire usage de la touche logarithme de la calculatrice, calculer a) $\ln 6$ b) $\ln 72$ c) $\ln \frac{2}{9}$ d) $\ln 8100$ e) $\ln 0.015$
8. Calculer : $\exp_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 8)$ sol : $\sqrt{8}$

<u>Solutions :</u>

1. a) 8.326 b) 3.009 c) – 1.637
2. 7.636
3. a) $\frac{\text{loga } x + \text{loga } y + \text{loga } z}{3}$ b) $\frac{\log_a x}{2} + \frac{\log_a y + \log_a z}{4}$ c) $\log x + 2 \log y - \log 2 - \log z$

   d) $2 + 3 \log_a x + 0.5 \log_a y$ e) $\frac{7}{2} \log_a x + \frac{3}{2} y + \frac{1}{3} z$ f) $2 \log x - \log (x - y)$
4. a) $\log \frac{ac}{\sqrt{b}}$ b) $- 2 \log 3$ c) $\log 72$ d) $\ln \frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{b}}{\sqrt{c}}$ e) $\ln 18$
5. a) $2u$ b) $\frac{1}{2}(1 + u)$ c) $3u - 6$ d) $-\frac{u}{3}$
6. a) $\ln 8 = 2.079$ b) $\ln 0.5 = - 0.693$ c) $\ln\frac{1}{32} = - 3.465$ d) $\ln \sqrt[4]{32} = 0.866$
7. a) $\ln 6 = 1.792$ b) $\ln 72 = 4.277$ c) $\ln \frac{2}{9} = - 1.505$ d) $\ln 8100 = 9$

   e) $\ln 0.015 = - 4.198$
8. $\sqrt{8}$

2. Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmiques

2.1 Les fonctions exponentielles.

Nous avons vu au chapitre précédent : $(e^{f(x)})' = f'(x)\, e^{f(x)}$

Nous allons maintenant pouvoir également calculer la dérivée de toute autre fonction exponentielle.

Nous savions : $(a^x) = a^x \cdot k_a$ où k_a est une constante qui dépend de a. Il nous reste à déterminer cette constante.

$\forall\, a \in \mathbb{R}_0^+ \; (a \neq 1) : a = e^{\ln a} \Rightarrow (a^x)' = (e^{(\ln a).x})' = ((\ln a).x)' \cdot e^{(\ln a).x} = \ln a \cdot e^{(\ln a).x} = \ln a\, a^x$

De même par la dérivée de la composée de 2 fonctions, nous obtenons : $(a^{f(x)})' = \ln a \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x)$

2.2 Les fonctions logarithmiques.

$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x \Leftrightarrow (e^y)' = 1 \Leftrightarrow y'\, e^y = 1 \Leftrightarrow y' = \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1}{x}$

et nous avons ainsi : $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

A nouveau, par la dérivée de la composée de 2 fonctions, nous avons : $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

De même : $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x \Leftrightarrow (a^y)' = 1 \Leftrightarrow y' \cdot \ln a \cdot a^y = 1 \Leftrightarrow y' = \dfrac{1}{\ln a \cdot a^y} = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

Et de nouveau : $(\log_a f(x))' = \dfrac{f'(x)}{\ln a \cdot f(x)}$

2.3 Résumé.

$(e^x)' = e^x$	$(e^{f(x)})' = f'(x)\, e^{f(x)}$
$(a^x)' = \ln a\, a^x$	$(a^{f(x)})' = \ln a \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x)$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a f(x))' = \dfrac{f'(x)}{\ln a \cdot f(x)}$

2.4 Exercices.

Calculer les dérivées suivantes :

1. $f(x) = \ln(1 - 4x^2)$
2. $f(x) = \ln(4x^2 + 2x + 1)^3$
3. $f(x) = 3^{x^2-2}$
4. $f(x) = \log_2(3x^2 - \sin x)$
5. $f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 3x + 2}$
6. $f(x) = \ln(\ln ax)$
7. $f(x) = \ln(\arctan e^x)$
8. $f(x) = 3^{\cos x}$
9. $f(x) = \log_2 e^{2x}$
10. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x \cdot e^x}$
11. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$
12. $f(x) = \arctan \ln x$
13. $f(x) = (\arccos(\ln 3x))^4$
14. $f(x) = a^{x^2}$
15. $f(x) = \log_a \dfrac{1}{x}$

Solutions :

1. $\dfrac{-8x}{1-4x^2}$
2. $\dfrac{3(8x+2)}{4x^2+2x+1}$
3. $3^{x^2-2}\, 2x \ln 3$
4. $\dfrac{6x - \cos x}{(3x^2 - \sin x)\ln 2}$

5. $\dfrac{2x-3}{2(x^2-3x+2)}$
6. $\dfrac{1}{x\ln(ax)}$
7. $\dfrac{e^x}{(1+e^{2x})\arctan e^x}$
8. $-\sin x \cdot \ln 3 \cdot 3^{\cos x}$
9. $\dfrac{2}{\ln 2}$
10. $\dfrac{1-\ln x - x\cdot\ln x}{x^2 e^x}$
11. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
12. $\dfrac{1}{x(1+(\ln x)^2)}$
13. $\dfrac{-4(\arccos(\ln 3x))^3}{x\sqrt{1-(\ln(3x))^2}}$
14. $2x \cdot a^{x^2} \ln a$
15. $\dfrac{-1}{x\cdot\ln a}$

3. Equations exponentielles et logarithmiques

3.1 Résoudre les équations suivantes :

1. $4\ln 3 = \ln 81 - 2\ln \dfrac{x}{3}$
2. $\ln(x-1) = \ln[3(x^2+2x-1)]$
3. $\ln x^2 + (\ln x - 4)(\ln x)^2 = 0$
4. $(\ln x)^2 - \ln x^3 + 2 = 0$
5. $2e^{2x} - 5e^x - 3 = 0$
6. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{2}$
7. $(e^{3x}-1)(\ln 5x - 2) = 0$
8. $\log_3(\log_4 x) = -1$
9. $\log_2(\log_x 81) = 2$
10. $\log_x 4 = \log_4 x$
11. $\sqrt{5^x} + \sqrt{\dfrac{1}{5^x}} = 2{,}9$
12. $4^x - 3^{x+\frac{1}{2}} = 3^{x-\frac{1}{2}} - 2^{2x}$
13. $\log(3-x) + \log(-x-6) = 1$
14. $\log_2 x \cdot \log_4 x = 8$
15. $3^{x+1} + 3^{2-x} = 28$
16. $\log_2(2^x - 1) + x = \log_4 144$

Solutions : (Attention aux conditions d'existence !)

1. 3
2. impossible
3. 1 et $e^{2\pm\sqrt{2}}$
4. e et e^2
5. ln 3
6. $\dfrac{\ln 3}{2}$
7. $\dfrac{e^2}{5}$
8. $\sqrt[3]{4}$
9. 3
10. 4 ou $\dfrac{1}{4}$
11. $\log_5 \dfrac{25}{4}$ ou $\log_5 0{,}16$
12. x = 0.5
13. x = - 7 (4 à rejeter)
14. x = 16 ou x = $\dfrac{1}{16}$
15. 2 et -1
16. x = 2

3.2 Résoudre les inéquations suivantes :

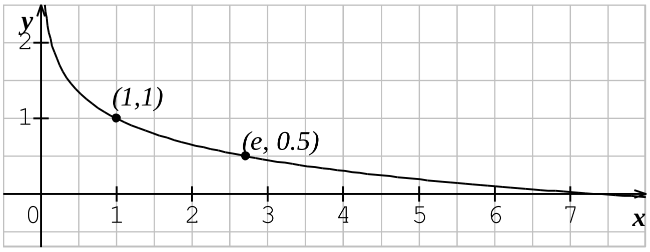
1. $\ln x - \ln 2 \le \ln(1-3x)$ sol : $]0\,,\frac{2}{7}]$
2. $\log_{\frac{1}{3}}(4-x^2) - \log_{\frac{1}{3}} x < \log_3 x$ sol : $]0\,,\sqrt{3}[$

4. Exercices généraux

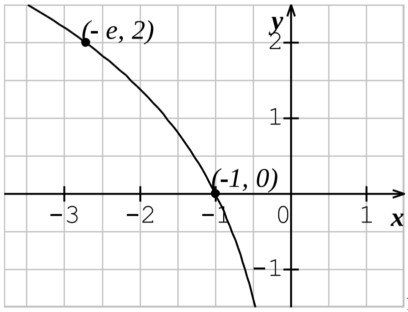
4.1.1 Etudier les variations des fonctions suivantes en se servant des propriétés des fonctions déduites. Préciser leur domaine de définition et leurs racines et vérifier graphiquement votre résultat.

1. $f(x) = 2\ln(x+1)$
2. $f(x) = 1 + \ln 2x$
3. $f(x) = \ln(2x-1)$
4. $f(x) = 2 + \dfrac{\ln(x-1)}{2}$
5. $f(x) = \ln\sqrt{x}$
6. $f(x) = \ln(x^2)$
7. $f(x) = \ln(x-1)^2$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1-x)}$

4.1.2 En tenant compte des indications données dans les graphes des fonctions ci-dessous, déterminer la valeur des paramètres a et b sachant que $f_1(x) = a + b \ln(x)$ et $f_2(x) = a \,.\, \ln(bx)$



f_1 (x)



f_2 (x)

4.1.3 Etudier les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
2. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
3. $f(x) = x - \ln(x+1)$
4. $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$
5. $f(x) = \ln(\text{tg } x)$
6. $f(x) = \ln(\arcsin x)$
7. $f(x) = \arcsin(\ln x)$
8. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln x}$
9. $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$

5. Quelques applications particulières des logarithmes

5.1 Le pH

Le pH permet de déterminer si une solution est plus ou moins acide. C'est une mesure de la concentration en ions H_3O^+ de cette solution. La concentration est le nombre d'ions-gramme par litre de solution. L'eau pure à 20° C a une concentration en H_30^+ de 10^{-7} et la même concentration en ions OH^- : l'eau a un pH neutre.
Si une solution est plus acide, elle contient plus d'ions H_3O^+ et moins d'ions OH^-
(ex : si une solution a une concentration égale à 10^{-5} , elle contient plus d'ions H_3O^+ que l'eau $\Rightarrow$ cette solution est plus acide que l'eau)
La concentration dans les solutions varie de 10^{-14} à $10^{0.5}$ ions-grammes par litre (c-à-d de 0,00000000000001 à 3,1)
Ces valeurs étant très difficiles à employer, on leur préfère d'autres définies à partir des logarithmes correspondants. Plus précisément, le pH (potentiel hydrogène) d'une solution vaut l'opposé du logarithme de C (la concentration de cette solution en ions H_3O^+). C'est à dire :

$$\boxed{pH = -\log C}$$

Le tableau suivant établit la correspondance:

	Base			$\rightarrow$			Acide
Concentrations	10^{-14}	10^{-13}	....	10^{-7}	10^{-6}	...	$10^{0.5}$
logarithmes	-14	-13		-7	-6		0.5
pH	14	13		7	6		- 0.5

Pour le cas de l'eau , nous avons : pH de l'eau = $-\log 10^{-7} = \text{colog } 10^{-7} = 7$
En fait, le pH d'une solution est le cologarithme de la concentration de cette solution en ions H_3O^+
Grâce à ce changement, l'échelle des pH s'étend de 14 à - 0,5. Plus la valeur du pH est proche de 14, moins la solution est acide (plus elle est basique) et, plus il est proche de - 0,5, plus la solution est acide. L'indication d'une solution neutre étant bien entendu un pH égal à 7 comme celui de l'eau pure.

Exercices :

1. En ajoutant une solution basique à du vinaigre, on obtient une concentration en H_3O^+ 6000 fois plus petite que la concentration initiale. Comment cette manipulation agit-elle sur le pH ? sol : + 3.778

2. Pour que le pH d'une solution augmente de 4,2, comment doit-on agir sur la concentration en H_3O^+ de cette solution ? sol : la diviser par 15 848.9

5.2 Dans le domaine acoustique.

5.2.1 Mesure du son.

Pour qu'un bruit "chatouille" notre oreille, il faut que le pavillon, organe interne de l'oreille, réussisse à en capter une "quantité" suffisante. Cette quantité est appelée intensité sonore. Elle dépend de la puissance de la source sonore et de l'aire sur laquelle on capte le bruit. Elle s'exprime en watt/m^2. Il y a un seuil en dessous duquel nous sommes sourds. C'est le seuil d'audibilité.
A l'opposé, quand le bruit devient trop intense, on approche un nouveau seuil, le seuil de la douleur. On l'évalue à mille milliards de fois l'intensité minimum audible. Ainsi notre oreille travaille sur une échelle très étendue d'intensités.
D'autre part, selon la loi de Weber et Fechner en psychologie expérimentale, si l'intensité d'une excitation sensorielle (son, lumière, poids, ...) croît en progression géométrique, la sensation perçue par l'organe concerné croît, aux dires de nombreuses personnes, en progression arithmétique.
Voyons ce que signifie cela dans le domaine auditif.
Soit $I_{M,}$ l'intensité du son le plus fort que l'oreille humaine puisse percevoir et I_0 celle du son le plus faible. Il y a un rapport de 10^{12} entre l'un et l'autre.
Considérons, entre ces deux extrêmes, une série de sons en progression géométrique de raison 10. Les sensations perçues seront, elles en progression arithmétique. Pour cette raison, on a choisi une échelle de sons et une unité d'acoustique appelée BEL définie de manière à ce qu'au minimum de l'échelle corresponde zéro bel et au maximum 12 bels.
Ainsi, à un son 10^5 fois plus fort que le minimum correspond 5 Bels.
La correspondance est schématisée dans le tableau suivant :

Intensités	I_0	$10\ I_0$	$100\ I_0$	....	$I_M = 10^{12}\ I_0$
Niveaux sonores (en bels)	0	1	2		12

Si S représente le niveau sonore exprimé bels, I l'intensité du son mesuré et I_0 l'intensité du seuil d'audibilité pour l'oreille humaine, nous avons : S (en bels) = $\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

En pratique, le bel est une unité trop grande. C'est pourquoi, on utilise généralement le décibel qui est le dixième du bel. Les sons audibles s'étalent donc de 0 à 120 décibels.
Soit $I_{0,}$ l'intensité minimum audible.
alors à x bels correspond une intensité $10^x\ I_0$
à x décibels correspond $10^{0,1\,x} . I_0$
et de même à une intensité $I = y\ I_0$ correspond log y bels = 10 log y decibels.
En résumé : si S représente le niveau sonore exprimé en décibels, I l'intensité du son mesuré et I_0 l'intensité du seuil d'audibilité pour l'oreille humaine :

$$\boxed{S \text{ (en décibels)} = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$$

N.B. : I_0 vaut 10^{-12} watts/m^2 et $I_M = 1$w/m^2 qui correspond au seuil de la douleur.

Une intensité de 10^{-5} watts/m^2 correspond donc à un niveau sonore d'environ 70 db.

5.2.2 exercices :

1. Une conversation a une intensité de $10^6\ I_{0.}$ Quel est son niveau sonore ?
2. A quelle intensité correspond un niveau sonore de 120 db ?
3. Si on élève le niveau sonore de 1 db, de combien augmente l'intensité du son ? Reprendre la question pour une augmentation de 10 db puis de 20 db.
4. En général, on cherche à réduire le niveau sonore. Comment réduire l'intensité d'un son pour abaisser le niveau de 1 db ? Reprendre la question lorsqu'on cherche à abaisser le niveau de 10 db puis de 20 db.

5. Si on triple l'intensité sonore, de combien augmente le niveau sonore ?
6. Une discothèque possède une sono dont la puissance amène un niveau sonore de 90 db dans la salle. Elle projette d'en acheter une seconde identique. Les voisins protestent : "ils sont fous ces jeunes, 180 db !" Qu'en pensez-vous ?
7. Au festival de musique, les sonos donnent à plein régime : 110 db au premier rang à 10 m.
a) Quel est le niveau sonore au village voisin à 500 m ?
b) De quelle distance faut-il s'éloigner pour que le niveau sonore tombe à 60 db ?
(NB : l'intensité est inversement proportionnelle au carré de la distance)

<u>Solutions</u> :

1) 60 db 1) 10^{12} I_0 3) a) I $\sqrt[10]{10}$ b) I . 10 c) I . 100

4) a) I . 0,7943 b) I .0,1 c) I . 0,01 5) ΔS = + 4,77 db

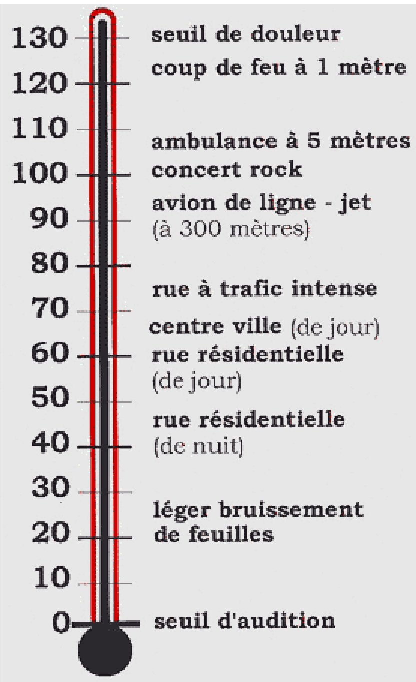
6) ΔS = + 3,01 db 7) a) 76,02 db b) 3162,27 m

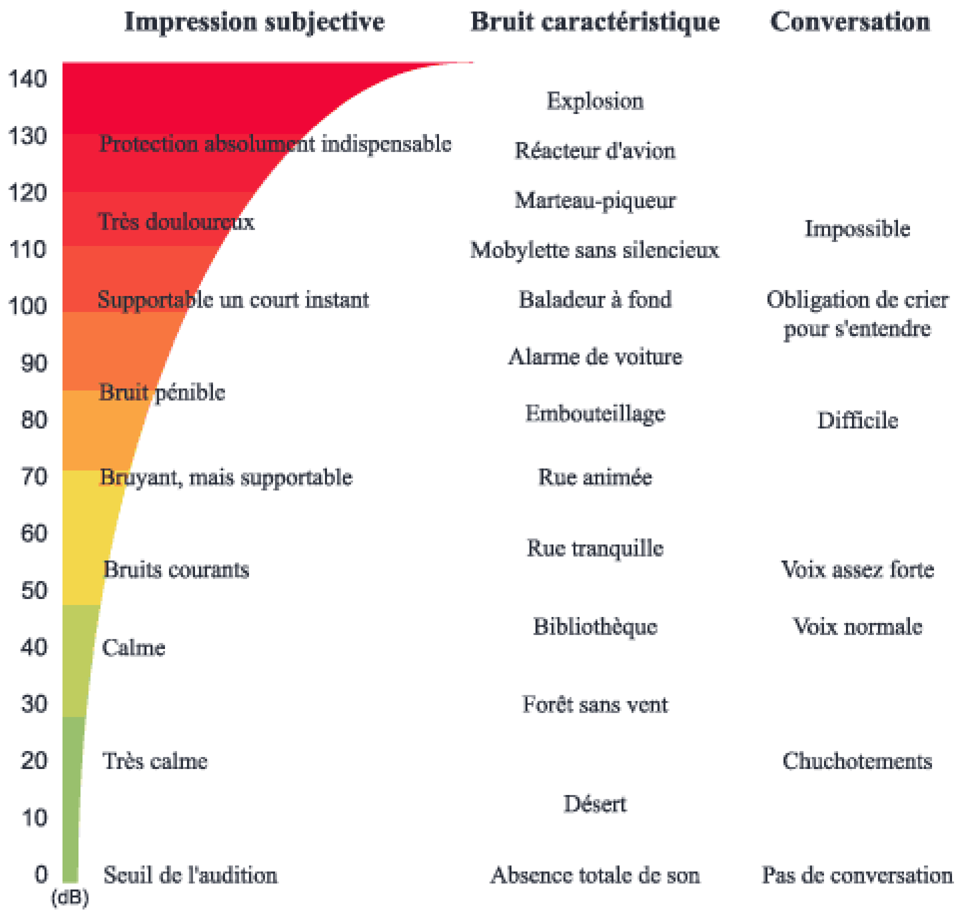
5.2.3 Le thermomètre du bruit

Les décibels sont au bruit ce que les degrés sont à la température. Selon les spécialistes, le véritable repos est impossible au-dessus de 55 décibels le jour, de 40 décibels la nuit.
Le danger d'une exposition au bruit dépend de deux facteurs :

- le niveau sonore,
- la durée d'exposition.

Plus l'intensité et la durée d'exposition sont élevés, plus le risque de lésion augmente.
Le son n'est perceptible qu'à partir de 10 dB. Il commence à être pénible à partir de 75 dB et il est dangereux à partir de 85 dB.
Or la douleur auditive n'apparaît qu'à 120 dB : de 85 à 120 dB, l'oreille est menacée de lésions irréversibles sans que l'on puisse s'en apercevoir !
Les deux schémas qui suivent permettent de se faire une idée du niveau sonore de quelques situations courantes.





5.3 Sismologie

La notion de magnitude a été introduite en 1935 par Charles Francis Richter (1900 – 1985) en vue d'établir une échelle conventionnelle permettant de comparer entre eux les séismes locaux de Californie. Richter définit la magnitude d'un séisme d'intensité I par la formule :

$$\boxed{M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$$

où I_0 est l'intensité d'un séisme de référence.

<u>Exercices</u>

1. Placer sur l'échelle de Richter les séismes :
   a) San Francisco (1906) , $I = 1{,}78 \cdot 10^8\ I_0$ sol : 8,25
   b) Los Angeles (1971), $I = 5{,}01 \cdot 10^6\ I_0$ sol : 6,70
2. Quelle est l'intensité d'un séisme de magnitude égale à 3 ? sol : $I = 10^3\ I_0$
3. L'énergie E (en joules) libérée au foyer du séisme est liée à la magnitude par la formule $\log E = a + b\,M$ (a et b étant deux constantes). Déterminer a et b sachant qu'un séisme de magnitude 8 met en jeu environ 30000 fois plus d'énergie qu'un séisme de magnitude 5, lui-même libérant une énergie de $0{,}2 \cdot 10^{20}$ joules.
   sol : $a = \frac{37 - 5\log 3}{3} + \log 2$ $\quad b = \frac{4 + \log 3}{3}$
4. Le 23 octobre 2004, un séisme de magnitude 6,8 secouait le Japon. Le 27 octobre de la même année, une autre secousse de magnitude 6 se produisait dans le même pays. Quel lien y a-t-il entre les intensités de ces séismes ? sol : $I_1 = 6{,}3 \cdot I_2$
5. Le 26 décembre 2003, un séisme d'une intensité 3,16 fois plus petite que celui du Japon du 23 octobre 2004 (magnitude 6,8) secouait le sud-est de l'Iran. Quelle était la magnitude de celui-ci ? sol : 6.3

5.4 Astronomie.

La magnitude apparente d'un astre d'éclat E est définie à partir d'un éclat de référence E_0 par

$$\boxed{M = \log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)}$$

avec la convention : la magnitude augmente de 5 lorsque l'éclat est divisé par 100
Dans ce cas-ci, la magnitude augmente lorsque l'éclat diminue.

1. Calculer ln a
2. Déterminer la magnitude apparente des astres :
   Soleil : $E = 4{,}786 \cdot 10^{10}\ E_0$
   Lune : $E = 1{,}2 \cdot 10^5\ E_0$
   Vénus : $E = 43{,}65\ E_0$
   Sirius : $E = 3{,}87\ E_0$

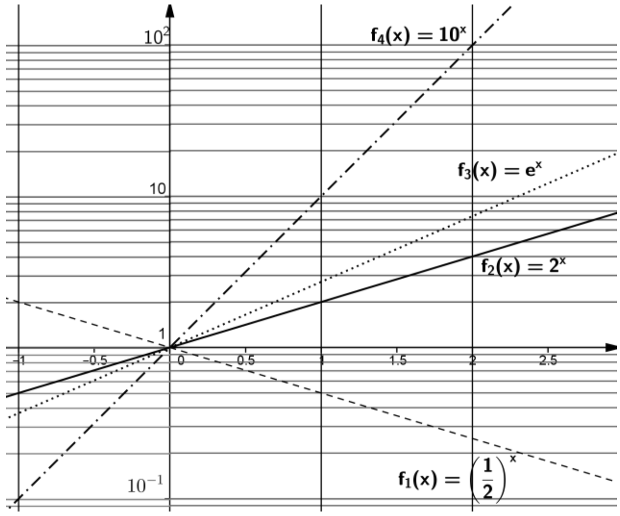
NB: Sirius est une des étoiles les plus visibles. On admet que le seuil de visibilité d'une étoile correspond à une magnitude égale à 6. Une étoile ayant une magnitude égale à 6 est à peine visible , tandis qu'une étoile ayant une magnitude égale à 1 se situe parmi les étoiles les plus visibles. Les planètes, encore plus visibles, ont une magnitude négative.
<u>Solutions</u> : 1. - 0,921 2. Soleil : - 26,70 Lune : - 12,70 Vénus : - 4,10 Sirius : - 1,47

6. Echelles logarithmiques.

L'échelle logarithmique est une alternative à l'échelle linéaire. Elle peut s'avérer préférable dans deux types de situations :

- Lorsqu'on étudie un phénomène utilisant une gamme étendue de valeurs, l'échelle linéaire est mal adaptée. On lui préfère une échelle logarithmique qui espace les valeurs faibles et rapproche les valeurs fortes.
- Certaines sensations suivent la loi de Weber-Fechner qui affirme qu'elles peuvent «croître comme le logarithme de l'excitant.» L'échelle logarithmique donne alors un reflet fidèle de la perception subjective. Nous étudierons ce type de situation notamment dans le domaine acoustique.

Une échelle semi- logarithmique consiste à utiliser une graduation exponentielle sur un des deux axes Dans l'exemple proposé, l'axe des ordonnées suit une graduation exponentielle. Dans ce cas, le zéro n'apparaîtra pas.

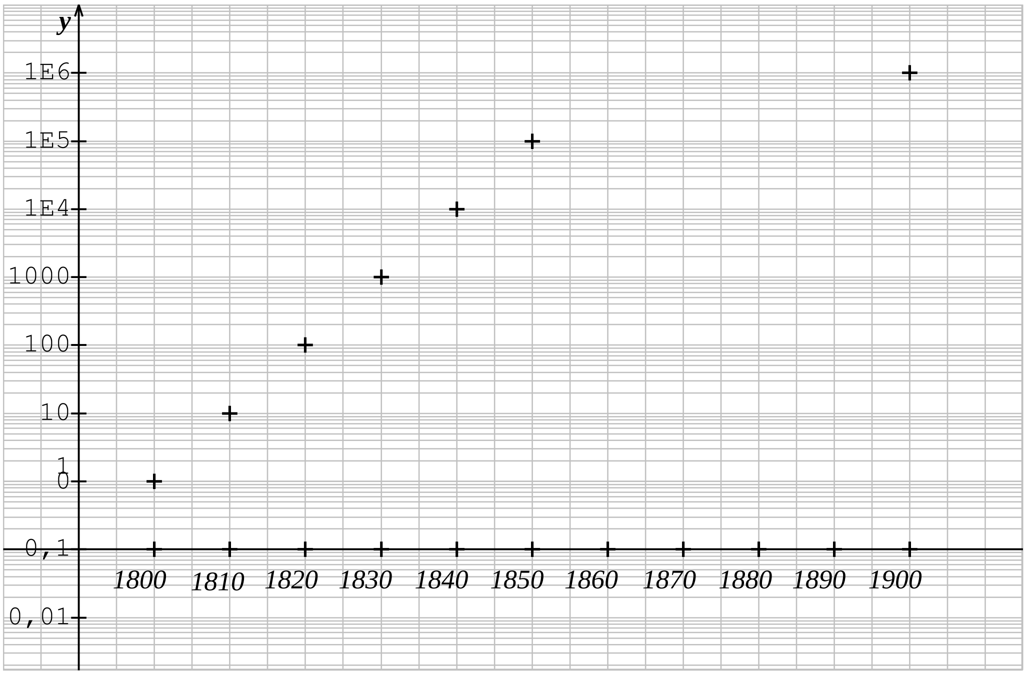


Dans le graphique ci-contre, nous avons tracé les graphes de
$f_1(x) = 0{,}5^x$ $f_2(x) = 2^x$
$f_3(x) = e^x$ $f_4(x) = 10^x$
Nous constatons alors que toutes ces fonctions exponentielles ont une droite comme graphe lorsqu'on prend une échelle logarithmique en ordonnée.
Remarquons que le point d'intersection de l'axe des abscisses avec l'axe des ordonnées n'est pas le point (0 0) sur ce graphique car l'ordonnée « 0 » n'y apparaît pas.

<u>Exemple d'utilisation des échelles logarithmiques</u> :
On souhaite tracer un graphique de l'évolution du prix d'un produit dont la croissance est spectaculaire telle que celle présentée dans le tableau suivant :

Année	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1900
Valeur en euros	1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000

Si on prend une échelle arithmétique, 1 mm = 1 unité, il faut un papier de 1 km...
Si on prend une feuille normale, on obtient un croquis où les variations d'avant 1840 ne sont pas perceptibles alors que la production a été multipliée par 10 000 !
Pour représenter des séries marquées par de très fortes amplitudes de variation, telle que celle-ci, tout en gardant le maximum d'information, on utilise des représentations sous forme de graphiques semi-logarithmiques telle que le graphique suivant l'illustre.



7. Applications des fonctions exponentielles et logarithmiques.

1. La population du COSTA RICA double tous les 18 ans. Actuellement, il y a 2 millions d'habitants.
   La population de la BOLIVIE est de 6 millions d'habitants, celle de la TURQUIE de 40 millions, et leurs populations doublent tous les 27 ans.
   a) A quelles dates le COSTA RICA rattrapera-t-il ces pays ?
   b) Quel est actuellement le taux de variation annuel du Costa Rica ? Que vaudra-t-il dans 10 ans ?
2. Le prix du beefsteak augmente de 2,5 % tous les ans.
   Mon salaire horaire augmente de 1,4 % tous les ans.
   Actuellement, je travaille une demi-heure pour me payer un bon beefsteak.
   Dans combien de temps mon steak me reviendra-t-il à 1 heure de travail, 2 heures, etc. ... ?
3. En 2008, un pays a fabriqué un million de bicyclettes pour sa consommation intérieure, et 250 000 pour l'exportation. Depuis lors, les augmentations annuelles de demandes sont, en moyenne de 11 % pour la consommation intérieure et de 40 % pour l'exportation.
   a) Calculer le nombre de bicyclettes qu'il faut produire en 2013 pour satisfaire la demande.
   b) Au bout de combien d'années les exportations dépasseront-elles la consommation intérieure ?
4. La raréfaction d'une matière première oblige un pays à envisager d'en diminuer la consommation de 8 % par an. Celle-ci était, en 2009, de 100 (en millions de tonnes).
   a) En quelle année la consommation sera-t-elle, pour la première fois, inférieure à 1 (million de tonnes) ?
   b) Quel doit être le pourcentage de diminution annuelle imposé pour atteindre une consommation annuelle égale à 1 au bout de 20 ans ?
5. Avec une inflation de 11% par an, en combien d'années les prix doublent-ils ? En combien de temps le prix du beurre (7,80 € actuellement) atteindra-t-il 10 € ? Quand un article vendu aujourd'hui 1,80 € valait-il 1 € ?
6. La consommation de pétrole d'un pays augmente régulièrement de 10 % par an.
   a) Déterminer au bout de combien d'années la consommation de ce pays atteindra le double de sa consommation actuelle.
   b) La consommation de pétrole étant actuellement de 100 millions de tonnes, quelle sera, dans cette hypothèse de croissance, la consommation de pétrole dans 20 ans ?
   c) Dans les mêmes conditions qu'en b), calculer la vitesse de croissance de la consommation après 3 ans.
7. Un marteau pilon frappe toutes les 6 secondes une pièce métallique dont l'épaisseur initiale est un centimètre. A chaque coup, l'épaisseur du métal diminue de 1%. Combien de coups seront-ils nécessaires pour réduire d'au moins un quart l'épaisseur de la pièce ?
   La pièce est terminée lorsque son épaisseur n'excède plus 5 millimètres.
   Quel est le temps minimum nécessaire pour terminer une pièce ?
8. La production totale d'électricité dans le monde augmente chaque année de 2 %. La terre reçoit annuellement une énergie solaire égale à 389 000 fois la production d'énergie électrique en 1970.
   A partir de quelle année la production mondiale d'énergie électrique dépassera l'énergie rayonnée par le soleil sur notre planète ?
9. Une chaufferie produit de la vapeur à 100°. La température de la vapeur diminue de 1% par mètre de tuyauterie parcouru. Quelle est la distance maximum pour recueillir de la vapeur à au moins 60° ?
10. Une personne loue un appartement à partir du 1er janvier 2010. Elle a le choix entre deux contrats. Dans les deux cas, le loyer mensuel initial est de 150 € et le locataire accepte de rester pendant six ans.
    1°) contrat 1 : augmentation annuelle de 10% du loyer de l'année précédente.
    2°) contrat 2 : augmentation annuelle forfaitaire du loyer mensuel de 17,50 €.
    a) Calculer le loyer final pour les deux types de contrat.
    b) Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire ? (celui où, au total, il paie le moins).
    c) Et si le locataire reste durant dix ans ?
11. Au 1er janvier 2009, une ville possède 3000 habitants. On constate que la population diminue de 4 % par an. Si le phénomène continue, quand aura-t-elle 2000 habitants ?
12. L'iode 128 a une période de 25 minutes (c'est-à-dire perd la moitié de sa masse pendant cette période).
    A des fins d'analyses, un malheureux cobaye en absorbe 12 milligrammes.
    a) Combien de temps faudra-t-il attendre pour que son corps n'en contienne plus que des traces infimes de 1

microgramme ? (0,001 milligramme).
b) Calculer le taux de variation instantané de la quantité d'iode présente dans le corps du cobaye après 1h.

13. **Pour se constituer une retraite, une personne verse une somme de 500 € par an pendant 20 ans. Chaque versement est effectué au début de l'année. Le placement est fait à intérêts composés au taux de 7 % l'an.
a) De quel capital disposera cette personne juste après le vingtième versement ?
b) Quel capital unique faut-il placer pour obtenir au même taux, après le même temps, la somme obtenue dans le premier cas ?

14. **a) Un commerçant emprunte 200 000 € au taux de 15 % par an. Il rembourse 75 000 € par an.
Quel est le nombre d'annuités ? Quel est le montant de la dernière annuité ?
b) Reprendre le problème dans un cadre plus général pour un emprunt C_0 au taux t et un remboursement R par an et exprimer le capital restant à rembourser au bout de n années.
c) Dans le cas d'un emprunt de 50 000 € à un taux de 8% et un remboursement de 6 000 € par an, quel capital reste-t-il à rembourser au bout de 10 ans ? Quand payera-t-on la dernière annuité ? Quel est son montant ?

Solutions.
1. a) Dans 85,59 ans et 233,38 ans b) 7 7016 hab./an et 113 194 hab/an
2. Dans 64,24 et 128,48 ans
3. a) 3 029618,155 vélos c.-à-d. 3029619; b) 5,97 donc 6 ans
4. a) Après 55,23 ans soit en 2064; b) 20,57 % par an
5. a) 6,64 ans; b) 2,38 ans; c) 5,63 ans.
6. a) 7,27 ans; b) 672,75 millions; c) 12 685 784,93 tonnes/an
7. 29 coups; 414 s.
8. Dans 650 ans, soit en 2620
9. 50,83 m
10. a) Loyer final (1) : 241,57 €; Loyer final (2): 237.5 €
b) Total (1) (payé en 6 fois) : 13888,098 € Total (2) : 13950 € $\Rightarrow$ le premier contrat est plus avantageux.
c) Loyer final 1 : 353,69 € et total 1 : 28 687,36 €
Loyer final 2 : 307,5 € et total 2 : 27 450 $\Rightarrow$ le second contrat est le plus avantageux.
11. Dans 9,93 ans soit décembre 2018
12. a) 338,77 min b) – 0,063 mg/min
13. a) $C = 500 \,.\, (1.07^{19} + 1.07^{18} + \dots 1.07 + 1) = 500 \,.\, \dfrac{1-1.07^{20}}{1-1.07} = 20\,497{,}75€$
b) Si versement unique : $20\,497{,}75 = C_0 \,.\, 1.07^{19} \Rightarrow$ il faut : $C_0 = 5667{,}80$ €
14. a) 4 annuités. Dernière annuité : 50298,12 €
b) $C_n = C_0 \,.\, (1+ t)^n + \dfrac{R}{t}\,(1 - (1+t)^n)$
c) $C_{10} = 50\,000 \,.\, 1.08^{10} + \dfrac{6000}{0.8}(1 - 1.08^{10}) = 21\,026{,}88$ €
$C_{14} = 1570{,}16 \Rightarrow$ dernière annuité au bout de 15 ans : $1570{,}16 \,.\, 1.08 = 1695{,}77$ €.