III. Fonctions exponentielles.

1. Exemples introductifs.

Exemple 1

Une population de bactéries évolue dans un milieu homogène (espace illimité, nourriture suffisante, aucune maladie). Le comptage des bactéries qui se fait par échantillonnage, à des intervalles de temps régulier, révèle que la population double toutes les heures. Si le nombre de bactéries au temps t est N(t), où t est mesuré en heures, et si la population initiale est N(0) = 1000, exprimez l'effectif de la population après 1h, 2h, …après t heures.

Exemple 2

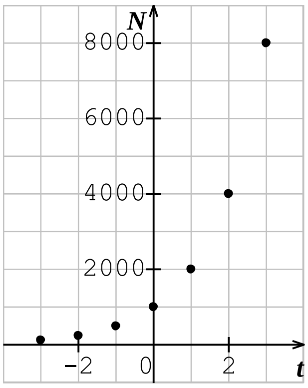
Aujourd'hui, j'ai placé 500€ en banque, à un taux de 3% .
a) Si le placement est fait à intérêts composés, calculer quel sera mon avoir dans 1 an, 2 ans, …t années.
b) Dans combien de temps ma somme de départ aura-t-elle doublé ?

Exemple 3

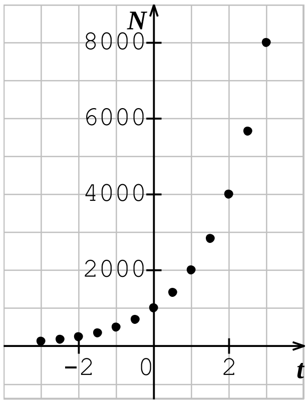
La demi-vie du strontium-90 est de 25 ans. Cela veut dire que la moitié de n'importe quelle quantité de strontium se sera désintégrée au bout de 25 ans.
a) cherchez une expression de la masse m(t) après t années
b) calculez ce qui restera après 70 ans d'une masse de départ de 24 mg

Envisageons le premier exemple et prenons quelques valeurs :

Temps (en heures)	Chiffre de population
-3	125
-2	250
-1	500
0	1000
1	2000
2	4000
3	8000



Et nous obtenons ainsi le premier graphique.



En prenant des points intermédiaires (t = -1.5,t = - 0.5, …), nous obtenons le second graphique ci-contre:
Nous constatons que ces points semblent appartenir à une courbe précise (constamment croissante). Dans ce graphique, il y a des trous correspondant aux valeurs de t irrationnelles. Pour pouvoir relier les points de ce graphique, il va falloir donner un sens à une puissance à exposant réel.
Avant de préciser ces notions, nous allons nous remettre en mémoire les propriétés des puissances à exposants rationnels.

2. Rappel sur les puissances

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}_0^+$ $\qquad \forall\, m, p \in \mathbb{Q}$

$a^m \,.\, a^p = a^{m+p}$ $\qquad \dfrac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$ $\qquad \left(a^m\right)^p = a^{m.p}$

$(a.b)^m = a^m \,.\, b^m$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

$a^0 = 1$

Exercices de révision : exprimer sans exposants fractionnaires ni négatifs et calculer si possible
(a, b, c, x et y $\in \Re_0^+$)

1. $\left(\frac{16}{9}\right)^{-0.5} =$
2. $8^{-\frac{2}{3}} =$
3. $\left(\frac{16}{9}\right)^{-1.5} =$
4. $81^{0.75} =$
5. $125^{-\frac{2}{3}} =$
6. $1^{-0.6} =$
7. $4^{1.5} =$
8. $81^{1.75} =$
9. $4^{-1.5} =$
10. $16^{-0.75} =$
11. $a^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{3}{5}} =$
12. $\frac{\sqrt[3]{27a^{-1}}}{\sqrt{9a^{-2}}} =$
13. $\left(-a^{-\frac{3}{2}} a^{-\frac{5}{3}}\right)^{-6} =$
14. $\sqrt[3]{a^{-2}\sqrt{b^3}\,b\sqrt[3]{a}} =$
15. $\left(\sqrt{\left(x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{2}}\right)^3}\right)^{-\frac{2}{3}} =$
16. $\sqrt[4]{a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{4}}}\sqrt{a^4 x^{-\frac{3}{2}}} =$
17. $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^5 \frac{a^{-2}}{\left(\sqrt{a}\right)^4} \frac{a^{-1}}{a^{-3}} =$
18. $\frac{a^{-2}\sqrt{b^3}c^3}{(2c)^2 a^{-3} b^3} =$
19. $\sqrt[p+1]{\frac{x^{p^2} x^{p+2} x^p}{x}} =$
20. $\sqrt[p]{\left(\frac{x^{2p^2}}{x^{4p}}\right)^{\frac{1}{p-2}}}$

3. La fonction exponentielle.

3.1 *Puissance à exposant irrationnel.*

Utilisant les définitions des puissances à exposants rationnels, pour un nombre réel positif a, nous avons ainsi une fonction : $\quad f : \quad Q \to R_0^+ \quad x \to f(x) = a^x$

Nous allons maintenant élargir la notion d'exposant pour donner un sens à tout exposant réel, en construisant un prolongement continu de la fonction précédente

Exemple :

Si nous voulons donner un sens à l'expression $3^{\sqrt{2}}$, nous avons :

$1 < \sqrt{2} < 2 \quad \Rightarrow \quad 3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 < 3^{\sqrt{2}} < 9$

$1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \quad \Rightarrow \quad 3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5} \quad \Leftrightarrow \quad 4,65 < 3^{\sqrt{2}} < 5,19$

$1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \quad \Rightarrow \quad 3^{1,41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,42} \quad \Leftrightarrow \quad 4,707 < 3^{\sqrt{2}} < 4,759$

....

$1,414213 < \sqrt{2} < 1,414214 \quad \Rightarrow \quad 3^{1,414213} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,414214} \quad \Leftrightarrow \quad 4,728801 < 3^{\sqrt{2}} < 4,728806$

Et la valeur de $3^{\sqrt{2}}$ se précise ainsi de plus en plus finement (pour une précision plus grande encore, il suffit de prendre une plus grande précision pour la valeur de $\sqrt{2}$)

<u>Définition :</u>

Si r est un irrationnel : $\quad \forall\, a \in R_0^+ \quad a^r = \lim_{q_i \to r} a^{q_i}$ avec $q_i \in Q$

3.2 *Fonction exponentielle de base a*

Nous pouvons maintenant prolonger la fonction f définie précédemment.

$f : R \to R \quad x \to f(x) = a^x = \exp_a x$
$a \in R_0^+ / \{1\}$ a est la base de la fonction exponentielle.

Nous admettrons que ce prolongement est continu et dérivable. La fonction obtenue est appelée fonction exponentielle de base a :

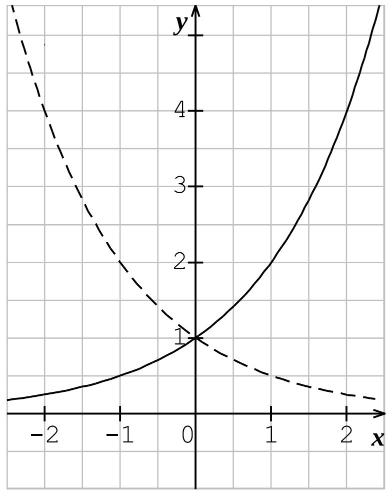
On peut montrer que les propriétés rappelées pour les puissances à exposants rationnels s'étendent au cas des puissances à exposant réel.

Exemple : exponentielles de base 2 et de base 1/2
soit $f(x) = 2^{x}$ (trait plein)

et $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ (tirets)

Calculons quelques valeurs :

x	2^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$
-3	1/8	8
-2	¼	4
-1	½	2
0	1	1
1	2	1/2
2	4	1/4
3	8	1/8



Remarque

Nous aurions pu prévoir l'allure du graphe de la fonction $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ à l'aide des propriétés des graphes associés. En effet, $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \left(2^{-1}\right)^{x} = 2^{-x}$

Nous avons donc $g(x) = f(-x)$ et les graphes de ces fonctions sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Observations : $\forall\ a \in R_0^+$

- si $a > 1$: $\exp_a(x)$ est une fonction strictement croissante de R dans R_0^+ (0,1) et (1, a) $\in$ G
  a^x n'admet pas de racine. $\lim\limits_{+\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} a^x = 0$
- si $0 < a < 1$: $\exp_a(x)$ est une fonction strictement décroissante de R dans R_0^+ (0,1) et (1, a) $\in$ G
  a^x n'admet pas de racine. $\lim\limits_{+\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{-\infty} a^x = +\infty$

Nous allons maintenant justifier ces observations.

3.3 Etude des caractéristiques de la fonction $\exp_a(x)$

3.3.1 Dérivée de la fonction $\exp_a(x)$

En utilisant la définition de la dérivée : $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, nous avons :

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

Or : $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{a^{0+\Delta x}-a^0}{\Delta x}$ qui est la valeur de la dérivée de a^x calculée en x = 0 vaut donc une constante notée k_a car elle dépend de la valeur a.
On a donc : $(a^x)' = a^x \cdot k_a$
Nous allons maintenant essayer de calculer cette constante.

Nous avons : $k_a = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \frac{a^0-1}{0} = \frac{0}{0}$ qui est une forme d'indétermination.

Actuellement, nous n'avons pas de moyens nous permettant de calculer cette constante de manière exacte : cela sera possible lorsque nous disposerons des fonctions logarithmiques. Nous pouvons simplement évaluer cette constante de manière empirique pour quelques valeurs de a.

a = 2

Δx	$\frac{2^{\Delta x}-1}{\Delta x}$
1	1
0.1	0.71
0.01	0.6955
0.001	0.6933
0.0001	0.6931
0.0000001	0.6931472….

a = 3

Δx	$\frac{3^{\Delta x}-1}{\Delta x}$
1	2
0.1	1.161
0.01	1.1046
0.001	1.0992
0.0001	1.0986
0.0000001	1.0986123

a = 2/3

Δx	$\frac{(2/3)^{\Delta x}-1}{\Delta x}$
1	- 0.3333
0.1	- 0.397…
0.01	- 0.404…
0.001	- 0.405…
0.0001	- 0.405…
0.0000001	- 0.405465…

Nous constatons que la constante est négative quand la base a < 1 et positive lorsque a > 1

Ceci correspond bien au résultat attendu puisque k_a valant la dérivée de a^x calculée en x = 0 représente la pente de la tangente au graphe de a^x en x = 0 : l'observation des graphes précédents nous permettait d'anticiper ce résultat.

Nous pouvons donc en déduire le signe de (a^x) '
En effet : $(a^x)' = a^x \cdot k_a$

Si $a > 1 \Rightarrow k_a > 0$	
x	
a^x	+ + +
k_a	+ + +
$(a^x)' = a^x \cdot k_a$	+ + +

Si $0 < a < 1 \Rightarrow k_a < 0$	
x	
a^x	+ + +
k_a	- - -
$(a^x)' = a^x \cdot k_a$	- - -

Et donc : $a > 1 \Rightarrow (a^x)'$ est toujours positive et la fonction a^x est toujours strictement croissante.
$0 < a < 1 \Rightarrow (a^x)'$ est toujours négative et la fonction a^x est toujours strictement décroissante

3.3.2 Asymptotes

Le domaine des fonctions $\exp_a(x)$ étant R , ces fonctions n'ont pas d'asymptotes verticales.

Asymptotes horizontales :

1er cas : a > 1.
On sait que : $\lim\limits_{+\infty} a^x = a^{+\infty} = +\infty$ et donc la fonction a^x n'admet pas d'asymptote horizontale en + ∞

et $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = a^{-\infty} = \frac{1}{a^\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$

La fonction $\exp_a(x)$ admet pour asymptote horizontale en - ∞, la droite y = 0

2ème cas : 0 < a < 1.

Si nous posons $b = \frac{1}{a}$ alors, b > 1 et comme nous l'avons observé au N° 3.1, le graphe de la fonction $f(x) = a^x$ est symétrique de celui de $g(x) = b^x$ par rapport à l'axe des ordonnées.

Nous pouvons donc immédiatement conclure que la fonction $f(x) = a^x$ admet alors une asymptote horizontale en + ∞ : la droite y = 0 et n'admet pas d'asymptote horizontale en - ∞

Asymptotes obliques :

1er cas : a > 1.
Nous avons montré que la fonction admet une asymptote horizontale en - ∞, elle ne peut donc avoir d'asymptote oblique en - ∞. La recherche d'une éventuelle asymptote oblique ne peut donc se faire qu'en + ∞.
Recherchons le coefficient angulaire d'une telle asymptote :

$a = \lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{a^x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$: une forme d'indétermination que l'on va lever par la règle de l'Hospital :

$a = \lim\limits_{+\infty} \frac{(a^x)'}{x'} = \lim\limits_{+\infty} \frac{a^x . k_a}{1} = k_a \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = k_a + \infty = + \infty$ (car $k_a > 0$ lorsque $a > 1$) et il n'y a donc pas d'asymptote oblique en $+ \infty$

La démonstration est semblable en $- \infty$ lorsque $0 < a < 1$

4. Applications.

1. Le nombre de fleurs de nénuphars d'un étang double chaque jour. Aujourd'hui la première fleur est apparue.
   a) combien de fleurs y aura-t-il dans 8 jours ?
   b) Exprimer , en fonction de n, le nombre de fleurs de nénuphars qu'il y aura dans n jours.
   c) Dans combien de jours y aura-t-il plus de 1000 fleurs de nénuphars ?
   d) Reprendre les trois premières questions dans le cas où 10 fleurs sont déjà écloses aujourd'hui.
   e) Faire une représentation graphique du phénomène dans les deux cas.

2. Calculer la valeur acquise d'un capital de 3000 € placé pendant 5 ans à intérêts composés dont le taux annuel est de 10 % , la période de capitalisation étant de 1 an, puis de 1 mois, puis de 1 jour.

3. La population d'une ville varie d'une manière exponentielle. On sait qu'en 2000 elle était de 135426 habitants et qu'en 2001 elle était de 137229 habitants.
   a) calculer une valeur approchée de la population prévue en 2010
   b) calculer une valeur approchée de la population en 1980, en 1950.

4. La quantité de matière d'une substance radioactive décroît de manière exponentielle avec le temps.

   a) Prouver qu'après un temps t, la quantité de matière restante est donnée par la formule : $q = q_0\ 2^{-\frac{t}{T}}$ où q_0 = la quantité initiale de matière, T = le temps au bout duquel la moitié des atomes présents se sont désintégrés. T est la période de la substance.
   b) On dispose de 50 mg de radium. Combien en restera-t-il dans 100 ans si la période du radium et de 1600 ans ?

<u>*Solutions*</u> :

1. a) 256 b) 2^n c) 10 jours d) 2560 ; $10 . 2^n$; 7 jours
2. a) $\left(\frac{11}{10}\right)^5 . 3000 = 4831{,}53$ € b) $\left(\frac{121}{120}\right)^{60} . 3000 = 4935{,}93$ € c) $\left(\frac{3651}{3650}\right)^{1825} . 3000 = 4945{,}83$ €
3. a) en 2010 : $a_{12} = 135426 . \left(\frac{137229}{135426}\right)^{10} = 154\ 575$
   b) en 1980 : $a_{-20} = 103\ 950$ en 1950 = $a_{-50} = 69\ 905$
4. a) $q_n = q_0\, a^n \Rightarrow q_T = q_0\, a^T = 0.5\, q_0 \Rightarrow a^T = 0{,}5 \Rightarrow a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}} \Rightarrow q_t = q_0\, a^t = q_0\ 2^{-\frac{t}{T}}$ b) 47,88

5. La fonction exponentielle Népérienne.

Nous avons montré : $(a^x)' = a^x\, k_a$ où $k_a = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ est une constante qui dépend de la base choisie ($k_a > 0$ lorsque $a > 1$ et $k_a < 0$ lorsque $0 < a < 1$). Au paragraphe 3.3.1, nous avons calculé cette constante de manière empirique pour quelques valeurs de a et avons obtenu : $k_2 = 0.69$, $k_3 = 1.098$ et $k_{\frac{2}{3}} = - 0.405$

Le mathématicien Néper qui vécut au 16ème siècle a eu l'idée de rechercher la base de la fonction exponentielle pour laquelle $k_a = 1$. Il s'agit donc d'une fonction exponentielle constamment égale à sa dérivée. Cette base a été notée e (initiale d'exponentielle).
On se doute que cette base est comprise entre 2 et 3 (car $k_2 = 0.69$ et $k_3 = 1{,}098$)
Nous allons maintenant déterminer cette base.

5.1 Première évaluation du nombre e

Il faut que : $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$

Soit $\Delta x = \frac{1}{y}$ $\Rightarrow$ si $\Delta x \to 0$ alors $y \to \infty$ et donc $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim\limits_{y \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{y}} - 1}{\frac{1}{y}} = 1$

Si $y \to \infty$: $\frac{e^{\frac{1}{y}} - 1}{\frac{1}{y}} \cong 1$ c-à-d $e^{\frac{1}{y}} - 1 \cong \frac{1}{y} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{y}} \cong \frac{1}{y} + 1 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{1}{y}}\right)^y \cong \left(\frac{1}{y} + 1\right)^y \Leftrightarrow e = \lim\limits_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$

Evaluons e en donnant à y des valeurs de plus en plus grandes :

Nous constatons que l'expression $\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$ tend bien vers une valeur de plus en plus précise

y	$\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$
10	2.593742
100	2.704814
1000	2.716924
10000	2.718146
100000	2.718268

Nous avons bien ainsi trouvé une valeur e telle que la fonction $f(x) = e^x$ soit constamment égale à sa dérivée. La base de cette fonction exponentielle vaut :

$$e = \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$$

Le nombre e est un nombre transcendant (c. à d. qui n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers)

5.2 Seconde évaluation du nombre e

On peut montrer qu'une fonction $y = f(x)$ peut être approximée par un polynôme infini sous la forme :
$f(x) = p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$(développement en série de Taylor)
Considérons ce développement lorsque $f(x) = e^x$
a) Il faut alors que la fonction et son polynôme d'approximation soient égaux pour toute valeur de x
Notamment, pour x = 0 , on a : $e^0 = p(0) \Rightarrow 1 = a_0$
On sait que $(e^x)' = e^x$ et donc, comme $e^x = p(x)$, on a $p'(x) = p(x)$

c. à d. : $a_1 + 2\, a_2 x + 3\, a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$(*)

En égalant les coefficients de même puissance, nous avons :

$a_0 = a_1$ $\quad a_1 = 2a_2$ $\quad a_2 = 3a_3$ $\quad a_3 = 4\, a_4$ ….et donc :

$a_1 = a_0$ $\quad a_2 = \frac{a_1}{2}$ $\quad a_3 = \frac{a_2}{3}$ $\quad a_4 = \frac{a_3}{4}$ …..

En utilisant la valeur trouvée pour a_0, nous obtenons successivement :

$a_1 = 1$ $\quad a_2 = \frac{1}{2}$ $\quad a_3 = \frac{1}{3.2}$ $\quad a_4 = \frac{1}{4.3.2}$

Notation : n! = n . (n – 1) . (n – 2) ….2 . 1 : qui se lit : factorielle de n avec la convention : 0! = 1
Nous avons :

$a_0 = 1$ $\quad a_1 = 1$ $\quad a_2 = \frac{1}{2!}$ $\quad a_3 = \frac{1}{3!}$ $\quad a_4 = \frac{1}{4!}$

Et de même : $a_n = \frac{1}{n!}$ quelle que soit la valeur de n $\Rightarrow p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

En remarquant que 0! = 1 et 1! = 1, nous pouvons écrire : $e^x = p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

Or : $e = e^1 = p(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$

En calculant jusqu'à l'ordre n, nous obtenons les valeurs suivantes d'approximation de e :

n	$p_n(1)$
2	2.5
3	2.6666
4	2.70833
5	2.71666
6	2.71805

Le nombre e ne connaît pas la célébrité du nombre π et pourtant on lui trouve de très nombreuses ressemblances. Comme π, e est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique.

Ses premières décimales sont : e = 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995 9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274…
Le nombre e est également un nombre *transcendant*. On dit qu'un nombre est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers.

Le nombre $\sqrt{2}$ par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation $x^2 = 2$. Un tel nombre est dit "algébrique"

5.3 Une situation concrète où on retrouve le nombre e

Le nombre e peut aussi se retrouver dans différentes situations. L'exemple suivant nous le montre.
Supposons que "Petit-futé" place une somme de 1€ dans une banque au taux de 100 % durant une période déterminée. Après une période complète, la banque lui remboursera donc 1+1 €, soit 2 €.
Comme il espère gagner plus, il propose à son banquier de lui accorder 50 % au bout de la moitié de la période et de replacer la somme obtenue à ce moment au taux de 50 % pendant une seconde demi-période. Il constate qu'il obtient alors $(1 + 0{,}50) + (1 + 0{,}50).0{,}50$ € $= (1 + 0{,}50)^2$ € = 2,25 € à la fin d'une période complète.

Fier de son calcul, il propose alors à son banquier de lui accorder 10% durant $\frac{1}{10}$ de la période, puis 10% de la somme obtenue à ce moment durant le second dixième de la période, et ainsi de suite pendant les dix dixièmes de la période. Il constate qu'il obtient à la fin de la période : $(1+0{,}1)^{10}$ € = 2,59 €.
Pourquoi alors, se dit-il, ne pas continuer le procédé ? (c. à d. diviser la période initiale par un nombre n de plus en plus grand et obtenir un taux d'intérêt de $\frac{1}{n} . 100\%$)

La somme obtenue à la fin de la période vaut alors : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ € , où n représente le nombre de subdivisions de la période initiale.
On constate que la somme atteinte à la fin de la période augmente de plus en plus et se rapproche de la valeur de e que nous avons trouvée dans la première évaluation : l'augmentation des bénéfices réalisés n'est pas infinie

6. Dérivées des fonctions exponentielles

6.1 Dérivée

Par définition même de la fonction exponentielle Népérienne, nous avons : $(e^x)' = e^x$ et en appliquant la dérivée de la composée de 2 fonctions, nous obtenons : $(e^{f(x)})' = f'(x)\, e^{f(x)}$

Et nous avons : $(a^x)' = a^x k_a$ et $(a^{f(x)})' = f'(x) . a^{f(x)} k_a$

Actuellement, nous ne sommes pas encore en mesure de calculer k_a : nous le ferons dans le prochain chapitre.
En résumé.

$(e^x)' = e^x$	$(e^{f(x)})' = f'(x)\, e^{f(x)}$

6.2 Exercices

Calculer les dérivées des fonctions suivantes

1. $f(x) = e^{3x^2-2x+1}$
2. $f(x) = \sin x . e^{2X}$
3. $f(x) = \arccos e^{-x}$

7. Exercices.

7.1 Résoudre les équations (ou inéquations) suivantes.

1. $2^{3x-2} - 2^{x-1} = 0$
2. $(0.3)^{2x-1} = 1$
3. $3^{1-2x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 0$
4. $3^{x^2} < \frac{1}{3}$
5. $(0.25)^{2-3x} > 4^{x-1}$
6. $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} < \frac{9}{4}$
7. $e^{4x} - 1 = 0$
8. $10^x = 0{,}01$
9. $e^{3x+1} = \frac{1}{e^2}$
10. $2^x + 2^{x+1} = 3$

11. $3^{x+1} = 108 - 3^{x+2}$
12. $10^{2x} - 11 \cdot 10^{x} = -10$
13. $4^{x} - 10 \cdot 2^{x} + 16 = 0$
14. $3 \cdot 9^{x} - 28 \cdot 3^{x} = -9$
15. $5^{x} + 4 \cdot 5^{-x} = 6 - 5^{-x}$

Solutions :

1. $x = 0.5$
2. $x = 0.5$
3. $x = \dfrac{2}{3}$
4. $S = \varnothing$
5. $x > 0.5$
6. $x > -\dfrac{2}{3}$
7. $x = 0$
8. $x = -2$
9. $x = -1$
10. $x = 0$
11. $x = 2$
12. $x = 1$ ou $x = 0$
13. $x = 3$ ou $x = 1$
14. $x = 2$ ou $x = -1$
15. $x = 0$ ou $x = 1$

7.2 Déterminer les domaines des fonctions suivantes

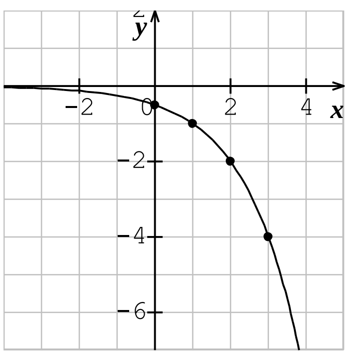
1) $f_1(x) = \dfrac{3x-2}{2^{3x-1}-4}$ 2) $f_2(x) = \sqrt{4^{x-2} - 0.5}$ 3) $f_3(x) = \sqrt{0.001 - (0.1)^{x+1}}$

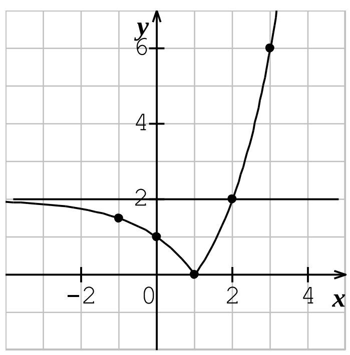
Sol : 1) dom $f_1 = \mathbb{R}/\{1\}$ 2) dom $f_2 = [1.5\ ;\ +\infty[$ 3) dom $f_3 = [2\ ;\ +\infty\ [$

7.3 Etudier les variations des fonctions suivantes en se servant des propriétés des fonctions déduites :

1. $f(x) = e^{-x}$
2. $f(x) = e^{-x+1}$
3. $f(x) = -2\,e^{x}$
4. $f(x) = 2 - 2 \cdot e^{2x-1}$
5. $f(x) = |2^{x-1} - 2|$
6. $f(x) = \dfrac{1}{e^{1-x}}$

7.4 Déterminer une équation cartésienne des courbes suivantes (en vous servant des points indiqués sur le graphique), si on sait qu'elles ont été obtenues par manipulations de la courbe d'équation $y = 2^x$





7.5 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{3e^{-x}-3}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x\,e^{-x})$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x - x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{e^{3x}+3x^2}{4e^{x}+2x^2}$

7.6 Etudier les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x\,e^{-x}$
2. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$
3. $f(x) = e^{x}\cos 4x$
4. $f(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$
5. $f(x) = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$
6. $f(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$
7. $f(x) = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$
8. $f(x) = \dfrac{e^{x}}{x}$
9. $f(x) = e^{-x^2}$
10. $f(x) = (1+x)\,e^{-\frac{4}{x}}$

Remarque :
Les fonctions 4, 5, 6 et 7 sont appelées fonctions hyperboliques.

cosinus hyperbolique : $\text{ch } x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ sinus hyperbolique : $\text{sh } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

tangente hyperbolique : $\text{th } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$ et cotangente hyperbolique : $\text{coth } x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{\text{ch } x}{\text{sh } x}$

On montre facilement les propriétés suivantes (ayant leurs correspondantes dans les fonctions trigonométriques)

$\text{sh } 0 = \text{th } 0 = 0$ $\text{ch } 0 = 1$
$\text{sh }(-x) = -\text{sh } x$ $\text{ch }(-x) = \text{ch }(x)$
$\text{th }(-x) = -\text{th } x$ $\text{coth }(-x) = -\text{coth } x$
$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$ $\text{coth } x = \dfrac{1}{\text{th } x}$

$\text{ch }(x + y) = \text{ch } x \,.\, \text{ch } y + \text{sh } x \,.\, \text{sh } y$
$\text{sh }(x + y) = \text{sh } x \,.\, \text{ch } y + \text{ch } x \,.\, \text{sh } y$

$\text{ch } x \pm \text{sh } x = e^{\pm x}$

$1 + \text{ch } 2x = 2\,\text{ch}^2 x$

$\text{ch } 2x - 1 = 2\,\text{sh}^2 x$
$(\text{sh } x)' = \text{ch } x$
$(\text{ch } x)' = \text{sh } x$
$(\text{th } x)' = 1 - \text{th}^2 x = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$
$(\text{coth } x)' = -\dfrac{1}{\text{sh}^2 x}$

- On peut démontrer que le graphe de la fonction cosinus hyperbolique est la courbe d'équilibre d'un fil pesant; c'est pourquoi cette courbe est appelée <u>chaînette</u>.
- D'où vient la dénomination « hyperbolique » de ces fonctions ?

  Si on pose : $\begin{cases} x = \text{ch } t \\ y = \text{sh } t \end{cases}$ alors, en appliquant la relation $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$, nous constatons que l'ensemble des points P(x, y) obtenus lorsque t varie dans R vérifie la relation $x^2 - y^2 = 1$ qui est l'équation d'une hyperbole équilatère (nous le montrerons dans le chapitre V)

  Remarquons qu'il s'agit à nouveau d'une similitude avec les fonctions circulaires. En effet, cette fois, si on pose : $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, par la relation $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, nous constatons que l'ensemble des points P(x, y) obtenus lorsque t varie dans R vérifie la relation $x^2 + y^2 = 1$ qui est l'équation du cercle trigonométrique.

  Les équations $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ sont appelées équations paramétriques du cercle trigonométrique et de même les équations $\begin{cases} x = \text{ch } t \\ y = \text{sh } t \end{cases}$ sont les équations paramétriques de l'hyperbole $H \equiv x^2 - y^2 = 1$

  C'est pourquoi les fonctions cos t et sin t sont appelées fonctions circulaires tandis que les fonctions ch t et sh t sont appelées fonctions hyperboliques en référence à la courbe qu'elles décrivent.