XII. Géométrie analytique de l'espace

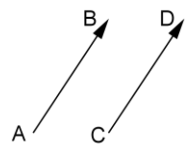
1. Introduction

1.1 Rappels.

Avant de généraliser à l'espace la notion de vecteurs rencontrée dans le plan, reprenons les essentiels de cette matière.

On appelle vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ un objet mathématique défini par 2 points du plan et caractérisé par

- sa direction : la droite AB
- son sens : origine A et extrémité B
- sa longueur notée $|\overrightarrow{AB}|$

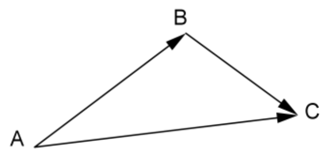


ex : le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{CD}$ (ils ont même direction, même sens et même longueur.)
La figure ABDC est alors un parallélogramme

<u>Somme de deux vecteurs</u>

a) *<u>consécutifs</u>* (c.-à-d. tels que l'extrémité du premier coïncide avec l'origine du second) :

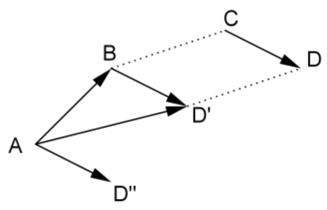
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ (relation de Chasles)}$$



b) *<u>quelconques</u>* : on déplacera l'un des deux pour que l'extrémité de l'un coïncide avec l'origine de l'autre.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{AD'}$$

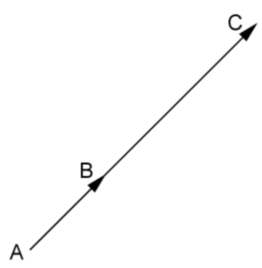
On peut aussi remarquer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ est la diagonale du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD''}$



<u>Multiplication scalaire :</u> $r\ \overrightarrow{AB}$ est un vecteur

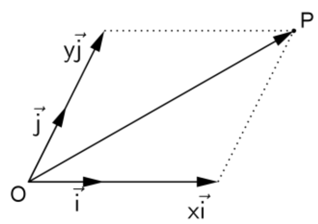
- de même direction que $\overrightarrow{AB}$
- de même sens que $\overrightarrow{AB}$ si r est positif et de sens opposé si r est négatif.
- de longueur égale à |r| fois celle de $\overrightarrow{AB}$

dans l'illustration ci-contre $\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AB}$



<u>Repère – composantes d'un vecteur.</u>

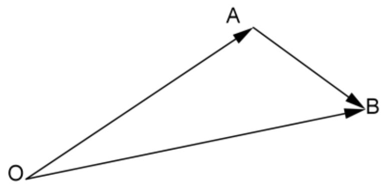
Si dans le plan π, on choisit une origine O on obtient le plan π_0
En choisissant deux vecteurs non nuls et non parallèles $\vec{i}$ et $\vec{j}$, chaque vecteur du plan se décompose de façon unique en une somme de multiples de ces vecteurs (combinaison linéaire de ces vecteurs) :
$\vec{u} = x.\vec{i}+y.\vec{j}$



Alors $(0, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé repère de π_0
(x, y) sont les composantes du vecteur $\vec{u}$ dans ce repère

N.B. : (x, y) est aussi la coordonnée du point P tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$
On montre aisément que les composantes de la somme de 2 vecteurs valent la somme des composantes et que les composantes de $r\vec{u}$ = r fois les composantes de $\vec{u}$

Considérons deux points du plan : A et B et leurs coordonnées respectives (a_1,a_2) et (b_1,b_2)



La relation de Chasles nous donne : $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

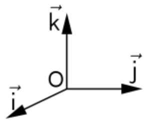
$\Rightarrow$ composantes de $\vec{AB}$ = composantes de $\vec{OB}$ - composantes de $\vec{OA}$

ou encore : composantes de $\vec{AB}$ = "extrémité" – "origine"

1.2 Généralisation : vecteurs dans l'espace.

Comme le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on peut définir un repère de l'espace :

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ étant linéairement indépendants c. à d. tels qu'aucun d'eux n'est combinaison linéaire des autres.)



Le point O est alors appelé origine et les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ vecteurs de base.

Tout point A de l'espace sera alors repéré par un triplet (a_1, a_2, a_3) tel que $\vec{OA} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

(a_1, a_2, a_3) est la coordonnée du point A dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

a_1 est l'abscisse, a_2 est l'ordonnée et a_3 est la cote.
Les notions sur les vecteurs vues dans le plan restent vraies dans l'espace.

En particulier, la relation de Chasles : $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

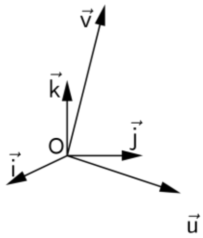
qui nous amène : $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ "extrémité" - "origine"

Les composantes de ces vecteurs seront aussi égales et donc : les composantes du vecteur $\vec{AB}$ = les composantes du vecteur $\vec{OB}$ - les composantes du vecteur $\vec{OA}$

2. Equations d'un plan

2.1 Plan vectoriel

Dans un premier temps, nous allons considérer un plan contenant l'origine O et deux vecteurs non nuls et non parallèles $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Un tel plan est appelé plan vectoriel, et les deux vecteurs sont appelés *vecteurs directeurs*. On le note π_0



2.1.1 Equation vectorielle

Comme nous l'avons montré pour un repère dans le plan, $\forall\ P \in \pi_0\ \exists\,!\ (r, s) \in R^2$:

$\vec{OP} = r\vec{u} + s\vec{v}$

$$\boxed{\forall\ P \in \pi_0\ \exists\,!\ (r, s) \in R^2 \Leftrightarrow \vec{OP} = r\vec{u} + s\vec{v}}$$

Cette équation est appelée équation vectorielle de π_0 Elle permet d'exprimer tout vecteur $\vec{OP}$ en fonction des vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

2.1.2 Equations paramétriques.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les composantes respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) et le point P a pour coordonnée $(x,y,z) \Leftrightarrow \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ $\quad \vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ et $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$

A partir de l'équation vectorielle de π_0 : $\vec{OP} = r\vec{u} + s\vec{v}$, nous obtenons :
$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = r\,(u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) + s\,(v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = ru_1 + sv_1 \\ y = ru_2 + sv_2 \\ z = ru_3 + sv_3 \end{cases}$$ qui sont les équations paramétriques de π_0

<u>Exemple</u> : soit π_0 de vecteurs directeurs $\vec{u}$ (1, -1, 0) et $\vec{v}$ (2,0,1), nous obtenons directement les équations paramétriques de π_0 : $\begin{cases} x = r + 2s \\ y = -r \\ z = s \end{cases}$

En faisant varier la valeur des paramètres r et s, on obtient les coordonnées des différents points du plan.

2.1.3 Equation cartésienne

Dans l'exemple pris ci-dessus, en éliminant le paramètre entre les équations, nous obtenons l'équation :
$x = - y + 2z \Leftrightarrow x + y - 2z = 0$ qui est l'équation cartésienne de π_0. Elle représente une condition à satisfaire par un point (x, y, z) pour appartenir au plan.
On peut aussi obtenir cette équation en observant que pour tout point P(x, y, z) du plan π_0 le déterminant suivant est égal à zéro (1ère colonne combinaison linéaire des deux autres :)

$\begin{vmatrix} x & u_1 & v_1 \\ y & u_2 & v_2 \\ z & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$ Dans notre exemple : $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & -1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ qui nous permet de retrouver l'équation ci-dessus.

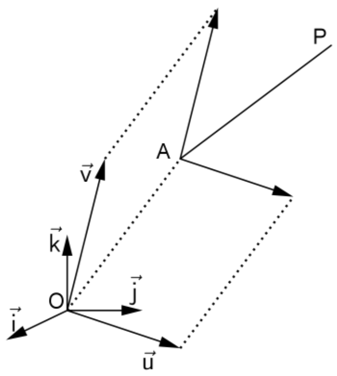
L'équation cartésienne d'un plan π_0 est donc toujours de la forme ax + by + cz = 0

2.2 Plan quelconque.

2.2.1 Equation vectorielle.

Considérons maintenant un plan π comprenant le point A et // π_0 (donc π // à $\vec{u}$ et π // à $\vec{v}$)

$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + r\vec{u} + s\vec{v}$ qui est l'équation vectorielle de π



2.2.2 Equations paramétriques.

En procédant comme précédemment, nous obtenons :

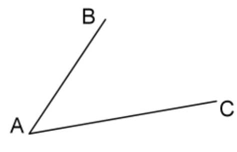
$$\begin{cases} x = a_1 + ru_1 + sv_1 \\ y = a_2 + ru_2 + sv_2 \\ z = a_3 + ru_3 + sv_3 \end{cases}$$ qui sont les équations paramétriques de π

2.2.3 Equation cartésienne

Comme pour un plan vectoriel, on déterminera son équation cartésienne en éliminant les paramètres r et s entre les équations paramétriques.

Le déterminant $\begin{vmatrix} x - a_1 & u_1 & v_1 \\ y - a_2 & u_2 & v_2 \\ z - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$ nous donne l'équation cartésienne de π de la forme ax + by + cz + d = 0

2.3 Plan comprenant trois points donnés.



Considérons trois points distincts non alignés A, B et C et le plan π défini par ces trois points.
On se ramène facilement au cas d'un plan dont on connaît un point A et deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il suffit en effet de prendre ces vecteurs directeurs respectivement égaux à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont bien non nuls et non parallèles puisque A, B et C sont distincts non alignés.

Exemple : Le plan π comprenant les points A(0,1,1)   B(1,0,1) et C(1,1,0)

$\overrightarrow{AB}(1,-1,0) \qquad \overrightarrow{AC}(1,0,-1) \qquad \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} x = r + s \\ y = -r + 1 \\ z = -s + 1 \end{cases}$

En éliminant les paramètres entre ces équations, nous obtenons par la seconde et la troisième équation : r = 1-y et s = 1-z. En remplaçant dans la première équation : x = 1 - y + 1- z nous obtenons :
$\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$, l'équation cartésienne de π

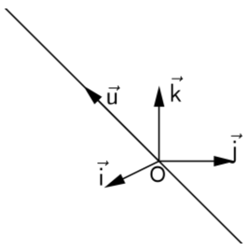
La recherche des équations d'un plan comprenant 3 points donnés (A, B, C) se ramène donc à la recherche des équations d'un plan dont on connaît un point (A par exemple) et 2 vecteurs directeurs ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par exemple)

3. Equations d'une droite.

3.1 Droite vectorielle.

3.1.1 Equation vectorielle

Considérons une droite d_0 comprenant l'origine 0 de direction $\vec{u}$



$\boxed{P \in d_0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = r\,\vec{u} \quad \text{est l'équation vectorielle de } d_0}$

3.1.2 Equations paramétriques.

Si P(x, y, z) et $\vec{u}\,(u_1, u_2, u_3)$, nous obtenons :

$$\boxed{\begin{cases} x = ru_1 \\ y = ru_2 \\ z = ru_3 \end{cases} \text{qui sont les équations paramétriques de } d_0}$$

3.1.3 Equation cartésienne

Eliminons le paramètre entre les équations paramétriques de d_0 : nous obtenons 2 équations linéaires en x, y, z. Ce sont les équations de deux plans comprenant d_0. Ces équations sont appelées équations cartésiennes de d_0

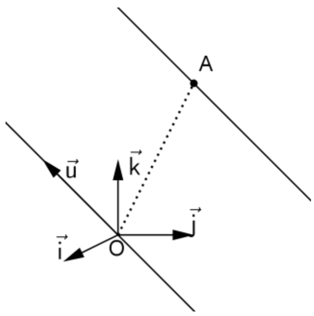
<u>Exemple</u> :Si d_0 de direction $\vec{u}\,(2, 3, 0)$ alors les équations paramétriques de d_0 sont : $\begin{cases} x = 2r \\ y = 3r \\ z = 0 \end{cases}$

Et ses équations cartésiennes seront : $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

3.2 Droite quelconque

3.2.1 Equation vectorielle.

Considérons maintenant une droite d comprenant le point A et de même direction que d_0



$\boxed{P \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + r\vec{u} \text{ qui est l'équation vectorielle de d}}$

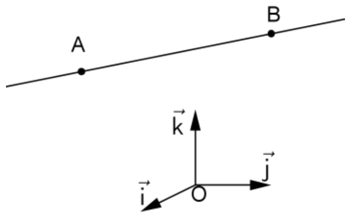
3.2.2 Equations paramétriques.

Comme précédemment, nous obtenons: $\boxed{\begin{cases} x = a_1 + ru_1 \\ y = a_2 + ru_2 \\ z = a_3 + ru_3 \end{cases} \text{: les équations paramétriques de d}}$

3.2.3 Equation cartésienne d'une droite

Comme pour une droite vectorielle, on déterminera son équation cartésienne en éliminant le paramètre entre les équations paramétriques, et nous obtenons alors à nouveau deux équations linéaires en x, y, z qui sont les équations cartésiennes de deux plans dont l'intersection est d.

3.2.4 Equation d'une droite déterminée par 2 points distincts A et B.



Nous constatons alors que le vecteur $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de d et nous sommes ainsi ramenés au cas d'une droite passant par un point (A) et de vecteur directeur donné.

C. à d. $\vec{OP} = \vec{OA} + r\,\vec{AB}$

Si A et B ont pour coordonnées respectives : (a_1, a_2 ,a_3) et (b_1, b_2 , b_3) et P(x,y,z)

nous avons : $\vec{AB} = (b_1 - a_1)\,\vec{i} + (b_2 - a_2)\,\vec{j} + (b_3 - a_3)\,\vec{k}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = r(b_1 - a_1) + a_1 \\ y = r(b_2 - a_2) + a_2 \\ z = r(b_3 - a_3) + a_3 \end{cases}$ qui sont les équations paramétriques de la droite d

($b_1 - a_1$,$b_2 - a_2$, $b_3 - a_3$) est la coordonnée d'un vecteur directeur de d

La recherche des équations d'une droite comprenant 2 points donnés (A, B) se ramène donc à la recherche des équations d'une droite dont on connaît un point (A par exemple) et 1 vecteurs directeur ($\vec{AB}$ par exemple)

3.2.5 Exemple.

d ∋ A(1,4,-3) et B(2,5,1) $\Rightarrow \vec{AB}$ (1,1,4) $\Rightarrow$ d ≡ $\begin{cases} x = r + 1 \\ y = r + 4 \\ z = 4r - 3 \end{cases}$

Par la première équation : r = x - 1 $\Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 + 4 \\ z = 4x - 4 - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z - 7 = 0 \end{cases}$

Ce dernier système est appelé équation cartésienne de d.

4. Intersections de droites et de plans – parallélisme.

4.1 Deux plans.

__Exemple1__ : Soit à déterminer l'intersection des plans α et β : α ∋ A(1,1,2) B(2,1,3) et C(0,0,0) et β ∋ A'(0,4,5) B' (1,9,10) et C'(-5,-2,-1)

Le calcul nous permet d'obtenir les équations cartésiennes de α et β :

$\alpha \equiv x + y - z = 0$ et $\beta \equiv y - z + 1 = 0$

Considérons le système formé par ces deux équations.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z \\ y = -1 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + z \\ y = -1 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - z + z \\ y = -1 + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + r \\ z = r \end{cases}$$

Et nous obtenons $\alpha \cap \beta$, une droite de vecteur directeur (0,1,1) et comprenant le point (1,-1,0)

Exemple 2 : Déterminer l'intersection des plans $\alpha \equiv 2x - y + 3z + 2 = 0$ et $\beta \equiv 4x - 2y + 6z + 5 = 0$
Nous constatons très facilement que le système formé par les équations de ces deux plans est un système impossible. Les plans α et β n'ont donc pas de points communs : α // β

Exemple3 : Déterminer l'intersection des plans $\alpha \equiv 2x - y + 3z + 2 = 0$ et $\beta \equiv 4x - 2y + 6z + 4 = 0$
Au contraire de l'exemple précédent, le système formé par les équations de ces deux plans est un système indéterminé : tout point vérifiant l'équation de α vérifie celle de β : $\alpha = \beta = \alpha \cap \beta$

Conclusion :

π // $\pi' \Leftrightarrow \exists\, k \in R_0 : (a, b, c) = k\,(a', b', c')$
Les deux plans seront parallèles confondus si de plus $(a, b, c, d) = k\,(a', b', c', d')$
Ils seront parallèles distincts si $\exists\, k \in R_0 : (a, b, c) = k\,(a', b', c')$ et $d \neq kd'$

4.2 Intersection d'une droite et d'un plan – parallélisme.

4.2.1 La droite et le plan sont donnés par leurs équations cartésiennes

Exemple :.on cherche l'intersection de la droite $d \equiv \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$ et du plan $\pi \equiv 2x + y + z = 1$

En résolvant le système de 3 équations à 3 inconnues formé par les équations de d et celle de π :

$\begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$ on obtient : $(x, y, z) = \left(-\frac{11}{12}, \frac{31}{12}, \frac{1}{4}\right) = a \cap \pi$

Si le système avait été impossible ou indéterminé, d aurait été respectivement // distincte ou incluse au plan π

La recherche de *l'intersection d'un plan et d'une droite connus par leurs équations cartésiennes* se fait en résolvant le système de 3 équations à 3 inconnues formé par les équations de la droite et celle du plan. Si le système obtenu a une solution unique : les 3 plans se coupent en un point S'il est impossible d est // distincte de π S'il est indéterminé, d est // incluse dans π

4.2.2 La droite est donnée par ses équations paramétriques et le plan est donné par son équation cartésienne

Exemple : $d \equiv \begin{cases} x = r - 1 \\ y = 2r + 3 \\ z = r \end{cases}$

a) Soit à chercher $d \cap \pi_1 \equiv 2x + y + z = 3$

En remplaçant les valeurs de la coordonnée d'un point courant de d dans l'équation de π_1 , nous obtenons l'équation : $2\,(r - 1) + (2r + 3) + r = 3$: une équation du premier degré en r qui nous permet de déterminer la valeur de ce paramètre $r = \frac{2}{5}$. On peut alors calculer la coordonnée du point d'intersection en remplaçant r par sa valeur dans les équations paramétriques de d. $\Rightarrow$sol : $d \cap \pi_1 \left\{\left(-\frac{3}{5}, \frac{19}{5}, \frac{2}{5}\right)\right\}$

b) De même pour la recherche de $d \cap \pi_2 \equiv x - y + z - 2 = 0$, nous obtenons :

$r - 1 - 2r - 3 + r - 2 = 0$: une équation impossible : $d \parallel \pi_2$

c) et enfin, si nous recherchons $d \cap \pi_3 \equiv x + y - 3z - 2 = 0$, nous obtenons :

$r - 1 + 2r + 3 - 3r - 2 = 0$: une équation indéterminée qui nous permet de conclure : $d \subset \pi_3$

Pour rechercher *l'intersection d'un plan donné par son équation cartésienne et d'une droite donnée par ses équations paramétriques*, on remplacera les valeurs de la coordonnée d'un point courant de d dans l'équation de π. L'intersection de la droite et du plan dépend de l'équation du premier degré en r (le paramètre) ainsi obtenue

Si cette équation a une solution unique, la droite perce le plan en un point dont les coordonnées sont obtenues en remplaçant le paramètre par la solution de l'équation dans les équations paramétriques de d

Si l'équation est impossible d est // distincte de π

Si elle est indéterminée, d est // incluse dans π

4.2.3 Applications

Application 1 :Soit $d \equiv \begin{cases} x = r - 3 \\ y = -r + 1 \\ z = 2r - 1 \end{cases}$ Déterminer les équations de $\pi \parallel d$ et $\ni A(3, 1, -1)$ et $B(2, -1, 4)$

Les vecteurs directeurs de π : (1, - 1, 2) : (vecteur directeur de d) et $\overrightarrow{BA}$ (1, 2, -5)

On trouve alors $\pi \equiv \begin{cases} x = r + s + 3 \\ y = -r + 2s + 1 \\ z = 2r - 5s - 1 \end{cases}$ et donc $\pi \equiv x + 7y + 3z - 7 = 0$

Application 2 : L'équation cartésienne d'un plan parallèle à l'un des axes de coordonnées ne comprend pas la variable correspondante.
En effet si $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ // l'axe des abscisses (vecteur directeur $\vec{u}$ (1, 0, 0))$\Rightarrow \pi' \equiv ax + by + cz = 0$ comprend l'axe des abscisses $\Rightarrow$ (1, 0, 0) vérifie l'équation de $\pi' \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow \pi \equiv by + cz + d = 0$

Application 3 : L'équation cartésienne d'un plan parallèle à l'un des plans de coordonnées ne comprend qu'une variable : celle qui correspond à l'axe sécant au plan. En effet, si π // plan XY, $\pi \equiv z = k$ (on applique deux fois le raisonnement précédent).

Conclusion :

$d \parallel \pi$ ssi ($d \cap \pi = \varnothing$ ou $d \cap \pi = d$)
$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$:

$\pi \parallel OX \Leftrightarrow a = 0$	$\pi \parallel OY$ ssi $b = 0$	$\pi \parallel OZ$ ssi $c = 0$
π // plan OXY ssi $a = b = 0$	π // plan OXZ ssi $a = c = 0$	π // plan OYZ ssi $b = c = 0$

4.3 Deux droites : parallélisme - intersection.

4.3.1 Parallélisme

$d_1 \parallel d_2$ ssi un vecteur directeur de d_1 est multiple d'un vecteur directeur de d_2

Exemple : déterminer l'équation cartésienne de b // a sachant que $b \ni (2, 3, 0)$

$a \equiv \begin{cases} x = r+1 \\ y = -r+2 \\ z = 2r-1 \end{cases}$ $\qquad$ <u>sol</u> : $b \equiv \begin{cases} x = r+2 \\ y = -r+3 \\ z = 2r \end{cases}$

4.3.2 Intersection de deux droites :

<u>Exemple 1 : les droites sont données par leurs équations cartésiennes</u> :

Soit à déterminer l'intersection des droites $a \equiv \begin{cases} x+y=3 \\ x-y+z=6 \end{cases}$ et $b \equiv \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x-3y+2z=4 \end{cases}$

<u>Solution</u> : on résout le système de 4 équations à 3 inconnues

La solution des 3 premières équations : (x, y, z) = $\left(\frac{32}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{-1}{7}\right)$ ne vérifie pas la quatrième équation $\Rightarrow$ les droites sont gauches ou parallèles distinctes. $\Rightarrow$ on cherche un vecteur directeur de chacune des droites :

Pour a : y = r $\Rightarrow \begin{cases} x = -r+3 \\ y = r \\ z = 2r+3 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_a(-1, 1, 2)$ pour b : $\Rightarrow \begin{cases} x = 13r+10 \\ y = r \\ z = -5r-3 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_b(13, 1, -5)$

$\vec{v}_a$ pas // $\vec{v}_b \Rightarrow$ a et b sont gauches.

> Pour rechercher *<u>l'intersection de 2 droites données par leurs équations cartésiennes</u>*, on résout le système de 4 équations à 3 inconnues. Si le système admet une solution unique, les droites sont sécantes, s'il est indéterminé, les droites sont confondues et s'il est impossible, elles sont // ou gauches : dans ce cas, on cherchera un vecteur directeur de chaque droite : si ces vecteurs sont multiples l'un de l'autre, alors les droites sont //, sinon, elles sont gauches

<u>Exemple 2 : les droites sont données par leurs équations paramétriques</u> :

Déterminer l'intersection des droites : $a \equiv \begin{cases} x = 3r+2 \\ y = -r+1 \\ z = 2r \end{cases}$ et $b \equiv \begin{cases} x = 5+r \\ y = 2r \\ z = 2-r \end{cases}$

En renommant s le paramètre des équations de b, le problème se résume à résoudre le système $\begin{cases} 3r+2 = 5+s \\ -r+1 = 2s \\ 2r = 2-s \end{cases}$

Résolvons d'abord le système des deux premières équations : $\begin{cases} 3r+2 = 5+s \\ -r+1 = 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3r-s = 3 \\ r+2s = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6r-2s = 6 \\ r+2s = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7r = 7 \\ r+2s = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ s = 0 \end{cases}$

Nous constatons que les valeurs trouvées satisfont la 3$^{\text{ème}}$ équation : 2r = 2 – s c. à d. : 2 = 2 – 0

Les droites a et b sont donc sécantes au point (5, 0, 2) (obtenu en égalant le paramètre r à 1 dans les équations paramétriques de a ou en égalant le paramètre s à 0 dans les équations paramétriques de b.)

> Pour rechercher *<u>l'intersection de 2 droites données par leurs équations paramétriques</u>*, on résout le système de 3 équations à 2 inconnues obtenu en égalant les expressions des coordonnées d'un point courant de d_1 à celle d'un point de d_2 (en veillant à donner un nom différent au paramètre de chaque droite).
> - Si le système admet une solution unique, les droites sont sécantes
> - S'il est indéterminé, les droites sont confondues
> - S'il est impossible, elles sont // ou gauches : dans ce cas, on comparera les vecteurs directeurs de ces droites : si ces vecteurs sont multiples l'un de l'autre, alors les droites sont //, sinon, elles sont gauches

<u>Exemple 3 : Une des droites est donnée par ses équations paramétriques et l'autre par ses équations cartésiennes :</u>

Déterminer l'intersection des droites : a ≡ $\begin{cases} x = r - 1 \\ y = -r + 2 \\ z = 2r \end{cases}$ et b ≡ $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + 2z + 11 = 0 \end{cases}$

Les points de cette intersection doivent satisfaire à la fois les équations de a et de b $\Rightarrow$

$$\begin{cases} (r-1) + (-r+2) - (2r) = 3 \\ 2(r-1) - (-r+2) + 2(2r) + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2r = 2 \\ 7r = -7 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ r = -1 $\Rightarrow$ a $\cap$ b = {(-2, 3, -2)} (qui vérifie bien les équations de b).

Pour rechercher <u>*l'intersection de 2 droites lorsque d_1 est connue par ses équations paramétriques et d_2 par ses équations cartésiennes*</u>, on exprimera qu'un point courant de d_1 vérifie les équations de d_2 : on obtient alors un système de 2 équations à 1 inconnue (le paramètre r)

a) Si ce système admet une solution unique comme dans l'exemple ci-dessus, les droites sont sécantes.

b) Si le système obtenu est indéterminé (lorsque les deux équations sont indéterminées) d_1 et d_2 sont confondues (sont incluses dans les deux plans qui déterminent d_2, donc sont à l'intersection de ces deux plans)

c) Si le système est impossible

- Soit lorsque les deux valeurs trouvées pour r sont différentes (d_1 perce alors chacun des deux plans qui déterminent d_2 et donc d_1 et d_2 sont gauches)
- Soit lorsque les deux équations trouvées sont impossibles (d_1 est alors parallèle à chacun des deux plans qui déterminent d_2 et les droites d_1 et d_2 sont parallèles)

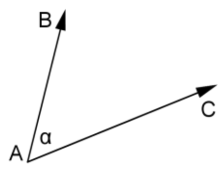
5. Orthogonalité.

5.1 Le produit scalaire dans le plan.

Le produit scalaire associe un nombre réel à un couple de vecteurs.

5.1.1 Définition : vecteurs de même origine.

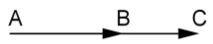
Le produit scalaire de deux vecteurs de même origine est égal au produit de leurs longueurs par le cosinus de l'angle formé par ces vecteurs : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |AB| \,.\, |AC| . \cos\alpha$
où $\alpha = B\hat{A}C$



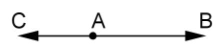
<u>Cas particuliers :</u>

1° Vecteurs alignés

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |AB| \,.\, |AC| \,.\, \cos B\hat{A}C = |AB| \,.\, |AC| \cos 0° = |AB| \,.\, |AC|$



$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |AB| \,.\, |AC| \cos B\hat{A}C = |AB| \,.\, |AC| \cos 180° = - |AB| \,.\, |AC|$



2° Vecteurs orthogonaux.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |AB| \,.\, |AC| \,.\, \cos 90° = 0$

5.1.2 Equivalence.

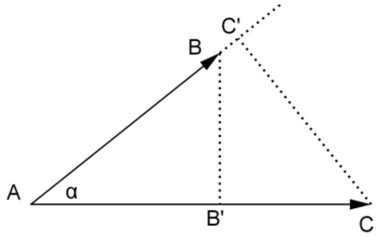
Le produit scalaire de deux vecteurs vaut le produit de la longueur de l'un d'eux par la longueur de la projection orthogonale de l'autre sur le premier, muni du signe adéquat.
Soit B' la projection orthogonale de B sur la droite AC et C' la projection orthogonale de C sur la droite AB

Premier cas de figure :

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |AB| \,.\, |AC| .\cos\alpha$

Or dans le Δ ABB' : $|AB'| = |AB| .\cos\alpha \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = |AB'| \,.\, |AC|$

Et dans le Δ ACC' : $|AC'| = |AC| .\cos\alpha \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = |AB| \,.\, |AC'|$



Second cas de figure :

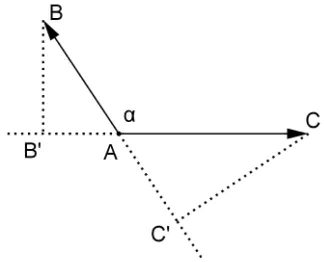
$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |AB| \,.\, |AC| .\cos\alpha$

Or dans le Δ ABB' : $|AB'| = |AB| .\cos(\pi - \alpha) = -|AB| .\cos\alpha$

$\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -|AB'| \,.\, |AC|$

Et dans le Δ ACC' : $|AC'| = |AC| .\cos(\pi - \alpha) = -|AC| .\cos\alpha$

$\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -|AB| \,.\, |AC'|$



5.1.3 Vecteurs quelconques.

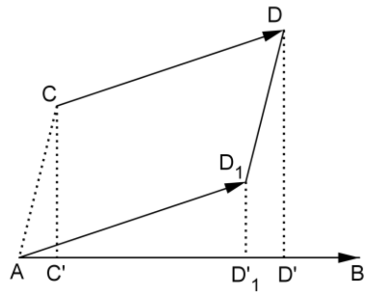
Lorsque les vecteurs n'ont pas la même origine, on en déplacera un des deux de manière qu'ils aient la même origine comme l'illustre la figure ci-dessous.

Nous avons alors :

$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{AD_1} = |AB| \,.\, |AD'_1| = |AB| \,.\, |C'D'|$

(car $|C'D'| = |AD'_1|$)

et on retrouve ainsi le produit scalaire exprimé en fonction des longueurs des projections orthogonales.



5.2 Produit scalaire dans l'espace.

5.2.1 Notions.

Si on translate les vecteurs de l'espace pour obtenir des vecteurs de même origine, on retrouve une situation de géométrie plane. La définition du produit scalaire de deux vecteurs de l'espace est donc la même que celle dans le plan.

On peut aussi aisément exprimer le produit scalaire en fonction des longueurs des projections orthogonales.

Soit $\alpha \ni C$ et $\perp AB$

$\beta \ni D$ et $\beta \perp AB$

C' = point de percée de AB dans α

D' = point de percée de AB dans β

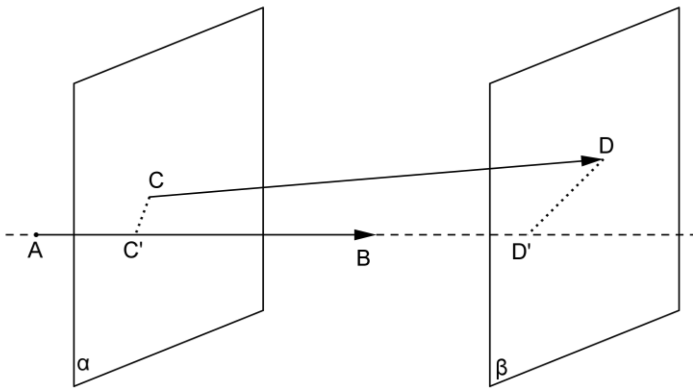
C' est la projection orthogonale de C sur AB

D' est la projection orthogonale de D sur AB

$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{CC'} + \vec{C'D'} + \vec{D'D})$

$= \vec{AB}.\vec{CC'} + \vec{AB}.\vec{C'D'} + \vec{AB}.\vec{D'D}$

$= 0 + \vec{AB}.\vec{C'D'} + 0 = \vec{AB}.\vec{C'D'} = |AB| \,.\, |C'D'|$



et nous retrouvons comme en géométrie plane : le produit scalaire de 2 vecteurs égale le produit de la longueur d'un des vecteurs ($\overline{AB}$) par la longueur de la projection orthogonale du second sur le premier ($\overline{C'D'}$) muni du signe adéquat.

5.2.2 Propriétés :

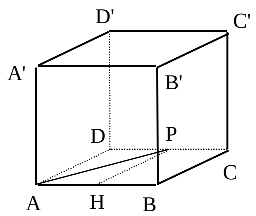
a) $\vec{AB} . \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{AB}$: le produit scalaire est commutatif

b) $r\,\vec{AB} \cdot s\,\vec{AC} = rs\ \vec{AB} \cdot \vec{AC}$

c) $\vec{AB} \cdot (\vec{CD} + \vec{EF}) = \vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AB} \cdot \vec{EF}$: le produit scalaire est distributif par rapport à la somme de 2 vecteurs.

5.2.3 Applications.

1. Dans le cube ci-contre :



$\vec{AB} \cdot \vec{A'C'} = \vec{A'B'} \cdot \vec{A'C'} = |A'B'| . |A'C'|. \cos 45° = a . a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

2. Dans le cube ABCDA'B'C'D', P est le milieu de DC

   a) Calculer $\vec{AP} \cdot \vec{A'B'}$

   b) En déduire la valeur de l'angle entre ces deux droites.

N.B. : l'angle entre 2 droites gauches est l'angle aigu formé par 2 droites sécantes parallèles à ces droites.

On a : a) $\vec{AP} \cdot \vec{A'B'} = \vec{AP} \cdot \vec{AB} = |AB| . |AH| = a . \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$

b) et aussi $\vec{AP} \cdot \vec{A'B'} = \vec{AP} \cdot \vec{AB} = |AP| . |AB| \cos \alpha$

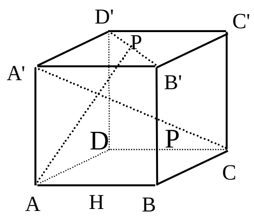
or $|AP|^2 = |AH|^2 + |PH|^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow |AP| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ et $|AB| = a$

$\Rightarrow \vec{AP} \cdot \vec{A'B'} = |AP| . |A'B'| \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} a .a . \cos \alpha$

En égalant ces 2 valeurs du produit scalaire $\vec{AP} \cdot \vec{A'B'}$ nous obtenons : $\frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} a^2 . \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \alpha = 63{,}4°$

3. Dans le cube ci-contre, P est le milieu de D'B'.
Démontrer que $AP \perp D'B'$



En effet : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{C'B'}$
Il suffit alors d'appliquer la distributivité du produit scalaire par rapport à la somme de 2 vecteurs et les relations d'orthogonalité entre les arêtes du cube pour constater que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{D'B'} = 0 \Rightarrow AP \perp A'C$ (cqfd)

5.2.4 Exercices.

1. Dans le cube ABCDA'B'C'D', P est le milieu de D'B'. Démontrer que $AP \perp A'C$
2. Dans le cube ABCDA'B'C'D' S est le milieu de [B'C'].

   Déterminer l'angle aigu formé par les droites BD' et BS — sol : = 39,23°
3. Soit le cube ABCDA'B'C'D'

   P et Q sont les milieux respectifs de [A'B'] et [B'C']

   I est le centre de la face A'B'C'D' et K est le centre de la face BCC'B'

   Déterminer les angles formés par

   a) BP et BQ — sol : 36,86°

   b) AC' et AA' — sol : 54°44'08"

c) AC' et CA' sol : 70°31'44''

d) AI et AK sol : 33°33'26''

e) BP et DQ sol : 72,65°

4. Soit P et Q , les milieux respectifs de [AB] et [BC], dans le tétraèdre régulier ABCD.

   Déterminer les angles entre

   a) AQ et BD sol : 73,23°

   b) AQ et DP sol : 80,4°

   c) PQ et AD sol : 60°

5. Dans le parallélépipède rectangle ABCDA'B'C'D' , |AB| = 6 cm, |AA'| = 2 cm et |AD| = 3 cm

   Si M est le milieu de [AB] et P celui de [C'D'], déterminer l'angle entre EM et BP

   sol : 19°45'44''

5.3 Généralisation

1. Définition : la norme d'un vecteur est la racine carrée du produit scalaire de ce vecteur par lui-même.

$$\| \vec{AB} \| = \sqrt{\vec{AB} \,.\, \vec{AB}} = \sqrt{\vec{AB}^{\,2}}$$

   La norme d'un vecteur $\vec{AB}$ est également la longueur du segment [AB].

   En effet : $\sqrt{\vec{AB} \,.\, \vec{AB}} = \sqrt{|AB| . |AB| . \cos 0°} = |AB|$

   Un vecteur est dit normé lorsque sa norme vaut un.

2. Vecteurs orthogonaux : $\vec{AB} \perp \vec{CD}$ ssi $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$

   Cas particulier : $\forall\ \vec{AB} : \vec{0} \cdot \vec{AB} = \vec{AB} \cdot \vec{0} = 0$

3. Un repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit orthonormé ssi les vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont normés et orthogonaux deux à deux.

4. Expression du produit scalaire dans un repère orthonormé.

   A et B, deux points de coordonnées respectives (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) dans le repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

   alors : $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k})$

   $= a_1b_1 \vec{i} \cdot \vec{i} + a_1b_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + a_1b_3 \vec{i} \cdot \vec{k} + a_2b_1 \vec{j} \cdot \vec{i} + a_2b_2 \vec{j} \cdot \vec{j} + a_2b_3 \vec{j} \cdot \vec{k} + a_3b_1 \vec{k} \cdot \vec{i} + a_3b_2 \vec{k} \cdot \vec{j} + a_3b_3 \vec{k} \cdot \vec{k}$

   $= a_1b_1 \cdot 1 + a_1 b_2 \cdot 0 + a_1b_3 \cdot 0 + a_2 b_1 \cdot 0 + a_2 b_2 \cdot 1 + a_2b_3 \cdot 0 + a_3b_1 \cdot 0 + a_3b_2 \cdot 0 + a_3 b_3 \cdot 1$

   $= a_1b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

   <u>*Cas particulier*</u> : $\vec{OA}^{\,2} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \Rightarrow \| \vec{OA} \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Si, dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ ont pour composantes respectives (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) alors : $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = a_1b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ et $\| \vec{OA} \| = \sqrt{\vec{OA}^{\,2}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

5.4 Applications

5.4.1 Angle entre deux vecteurs – distance entre 2 points.

A(2, 1, -3) et B(4, -2, 1). Déterminer l'angle AÔB et la distance entre les points A et B

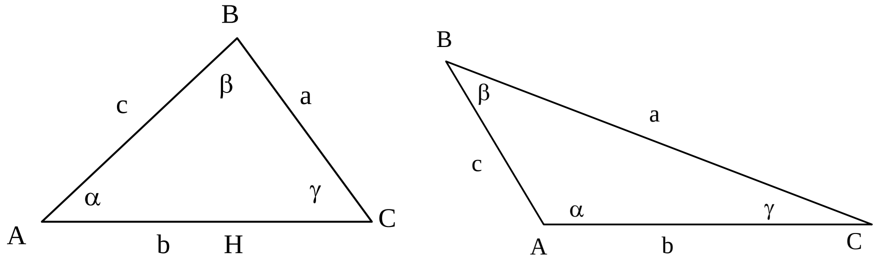
On calcule aisément $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 3 = \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cos A\hat{O}B = \sqrt{14} \cdot \sqrt{21} \cos A\hat{O}B \Rightarrow \cos A\hat{O}B = \dfrac{3}{7\sqrt{6}}$

et donc AÔB = 79,92° et $d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{29}$

5.4.2 Théorème de Pythagore généralisé (AL KASHI)

En trigonométrie nous avons montré que dans un triangle quelconque, nous avons les égalités suivantes :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos \beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos \gamma$



Les propriétés du produit scalaire nous permettent de démontrer ces égalités très facilement.

En effet : $b^2 = \vec{AC} \cdot \vec{AC} = \left(\vec{AB} + \vec{BC}\right) \cdot \left(\vec{AB} + \vec{BC}\right) = \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{AB} + \vec{BC} \cdot \vec{BC}$

$= c^2 + 2\,\vec{AB} \cdot \vec{BC} + a^2 = a^2 + c^2 + 2\,|AB|\,|BC| \cos\left(\vec{AB}, \vec{BC}\right) = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos \beta$

Les 2 autres égalités se démontrent de façon semblable

5.5 Exercices

Soit le cube ABCDA'B'C'D'

P et Q sont les milieux respectifs de [A'B'] et [B'C']

Déterminer les angles formés par

a) BP et BQ b) AC' et AA' c) AC' et CA' d) BP et DQ sol :

sol : a) 36,86° b) 54°44'08" c) 70°31'44" d) 72,65°

5.6 Droites orthogonales

Définition : 2 droites sont orthogonales ssi leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Exemple : a) Déterminer m sachant que $d \perp d'$ et d' a pour vecteur directeur $\vec{m}(4, m, -1)$

b) Déterminer ensuite les équations paramétriques de d' sachant que $d' \ni A(4, -1, 0)$

$d \equiv \begin{cases} x = r + 3 \\ y = -2r + 5 \\ z = 3r - 1 \end{cases}$ Solution : a) vecteur directeur de d : $\vec{n}(1, -2, 3) \perp \vec{m} \Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$ b) $d' \equiv \begin{cases} x = 4s + 4 \\ y = \frac{1}{2}s - 1 \\ z = -s \end{cases}$

5.7 Droites et plans perpendiculaires.

Une droite d est perpendiculaire à α ssi d est orthogonale à toute droite de $\alpha \Rightarrow$ d est orthogonale à α ssi un vecteur directeur de d est orthogonal à un vecteur quelconque de α

Exemple : déterminer l'équation cartésienne de π comprenant A(1,-2,3) et $\perp$ d $\equiv \begin{cases} x = 2r+1 \\ y = r-1 \\ z = -r+2 \end{cases}$

Un point P (x, y, z) $\in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \vec{v}$ ($\vec{v}$ vecteur directeur de d)

Or : $\overrightarrow{AP}$ (x – 1, y + 2, z – 3) et $\vec{v}$ (2, 1, -1)

Et nous avons donc P $\in \pi \Leftrightarrow 2(x-1) + (y+2) - (z-3) = 0$

qui nous donne l'équation cartésienne de π : $2x + y - z + 3 = 0$

Nous constatons que les coefficients de x, y et z sont les composantes du vecteur directeur de d : $\vec{v}$

Généralisation : déterminer l'équation cartésienne de π comprenant A(a_1 ,a_2 ,a_3) et $\perp$ d $\equiv \begin{cases} x = r\,u_1 + b_1 \\ y = r\,u_2 + b_2 \\ z = r\,u_3 + b_3 \end{cases}$

Solution : Comme dans l'exemple ci-dessus, P(x, y, z) $\in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \vec{u}$ (où $\overrightarrow{AP}$ (x - a_1 , y - a_2 , z - a_3) et $\vec{u}$

(u_1, u_2, u_3) vecteur directeur de d) $\Rightarrow (x - a_1)\,u_1 + (y - a_2)\,u_2 + (z - a_3)\,u_3 = 0$

$\Leftrightarrow u_1 x + u_2 y + u_3 z - a_1 u_1 - a_2 u_2 - a_3 u_3 = 0 \Rightarrow u_1x + u_2 y + u_3 z + k = 0$ et nous avons donc

$$\vec{u}\ (u_1, u_2, u_3) \perp \pi \equiv u_1x + u_2 y + u_3 z + k = 0$$

Conclusion :
Etant donné un plan $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$
Alors :
- le vecteur $\vec{n}$ (a, b, c) est orthogonal à π (ou normal à π)
- d $\perp \pi \Leftrightarrow$ le vecteur directeur de d est multiple de $\vec{n}$

Exemple 1: $\pi \equiv 2x - 3y + 5z + 12 = 0$ Déterminer l'équation de d $\ni$ A (4, -1, 2) et d $\perp \pi$

Solution : d $\equiv \begin{cases} x = 2r+4 \\ y = -3r-1 \\ z = 5r+2 \end{cases}$

Exemple 2 : d $\equiv \begin{cases} x = 2r-5 \\ y = -3r+7 \\ z = r-8 \end{cases}$ Déterminer l'équation cartésienne de π comprenant A(1, 4, -3) si $\pi \perp$ d

Solution : $\pi \equiv 2x - 3y + z + 13 = 0$

5.8 Plans perpendiculaires.

Définition : 2 plans sont perpendiculaires

ssi l'un d'eux comprend une droite perpendiculaire à l'autre

ou ssi un des plans a un vecteur directeur $\perp$ à deux vecteurs directeurs qui déterminent l'autre plan

ou ssi un vecteur normal à un des plans est $\perp$ à un vecteur normal à l'autre plan

Cette dernière considération nous permet plus facilement de déduire une condition pour que deux plans soient orthogonaux :

$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ et $\pi' \equiv a'x + b'y + c'z + d' = 0$

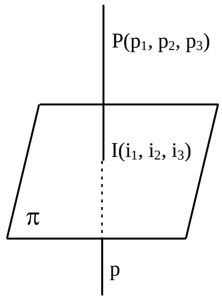
Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont des vecteurs normaux respectivement aux plans π et π'

$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$

Exemple : $\pi \equiv 2x + 3y - 5z + 1 = 0$ et $\pi' \equiv -3x + y - mz + 5 = 0$ Déterminer m pour que $\pi \perp \pi'$ Sol : $m = \frac{3}{5}$

6. Distances

6.1 *Distance d'un point P à un plan* Π



Exemple : $\pi \equiv -x + 3y - 2z + 5 = 0$ P(1, 2, 0) Déterminer la distance de P à π

Par P, on mène une perpendiculaire à π.

Equations paramétriques de cette droite : $\begin{cases} x = -r + 1 \\ y = 3r + 2 \\ z = -2r \end{cases}$

$P \cap \pi : r = -\frac{5}{7} \Rightarrow I\left(\frac{12}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{10}{7}\right) \Rightarrow d(P, \pi) = d(P, I) = \frac{5\sqrt{14}}{7}$

Nous allons maintenant envisager cette distance de façon plus générale.

Soit P (p_1, p_2, p_3) et $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$

Considérons la droite p ∍ P et ⊥ π $\Rightarrow p \equiv \begin{cases} x = ar + p_1 \\ y = br + p_2 \\ z = cr + p_3 \end{cases}$ et $\{I\} = p \cap \pi$

Cherchons la coordonnée de I : $a(ar + p_1) + b(br + p_2) + c(cr + p_3) + d = 0$

$\Rightarrow r = \frac{-ap_1 - bp_2 - cp_3 - d}{a^2 + b^2 + c^2}$ que l'on notera $r_1 \Rightarrow I(ar_1 + p_1, br_1 + p_2, cr_1 + p_3)$

et $\overrightarrow{PI}(ar_1 + p_1 - p_1, br_1 + p_2 - p_2, cr_1 + p_3 - p_3) = (ar_1, br_1, cr_1)$

$\|\overrightarrow{PI}\| = \sqrt{a^2r_1^2 + b^2r_1^2 + c^2r_1^2} = \sqrt{r_1^2(a^2 + b^2 + c^2)} = |r_1| \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} =$

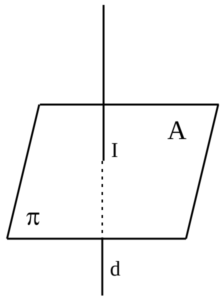
$\frac{|-ap_1 - bp_2 - cp_3 - d|}{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$. Et nous avons donc

$$\boxed{d(P, \pi) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Exemple : Déterminer la distance du point A (1, 2, 0) au plan $\pi \equiv -x + 3y - 2z + 5 = 0$

$d(A, \pi) = \frac{|-1 + 6 - 0 + 5|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{7} = 2{,}6726$

6.2 *Distance d'un point à une droite.*



Exemple : Soit $d \equiv \begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ z - 3x = 0 \end{cases}$ et A(-1 ,2 0)

Cherchons les équations paramétriques de d : $\begin{cases} x = r \\ y = \frac{1}{2}r + 2 \\ z = 3r \end{cases}$

π ∍ A et π ⊥ à d $\Rightarrow \pi \equiv x + \frac{1}{2}y + 3z + d = 0$

$(-1, 2, 0) \in \pi \Rightarrow d = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + \frac{1}{2}y + 3z = 0$

Cherchons la coordonnée de I : $d \cap \pi = \{I\} : r + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}r + 2) + 3 \cdot 3r = 0 \Rightarrow r = -\frac{4}{41} \Rightarrow I\left(-\frac{4}{41}, \frac{80}{41}, \frac{-12}{41}\right)$

$d(A, d) = d(A, I) = \|\overrightarrow{AI}\|$. Or $\overrightarrow{AI}\left(\frac{37}{41}, \frac{-2}{41}, \frac{-12}{41}\right) \Rightarrow d(A, d) = \sqrt{\frac{1517}{41^2}} = \frac{\sqrt{1517}}{41} = 0{,}9499$

Pour calculer la distance entre un point A et une droite d :
- on détermine l'équation du plan π ∍ A et ⊥ à d
- on recherche $d \cap \pi = \{I\}$

- distance (A, d) = d (A, I)

7. Angles

7.1 Angle de deux droites.

<u>Définition</u> : les angles formés par deux droites sont ceux que forment leurs vecteurs directeurs.

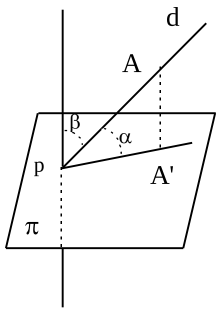
<u>Exemple</u> : trouver l'angle aigu formé par les droites $a \equiv \begin{cases} x = 2r + 1 \\ y = -3r - 3 \\ z = r + 2 \end{cases}$ et $b \equiv \begin{cases} x = -r - 1 \\ y = 2r + 4 \\ z = 3r - 7 \end{cases}$

Soit $\vec{m}(2, -3, 1)$ un vecteur directeur de a et $\vec{n}(-1, 2, 3)$ un vecteur directeur de b.

$\vec{m} \cdot \vec{n} = \|\vec{m}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow -5 = \sqrt{14}\sqrt{14} \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{-5}{14} \Rightarrow \alpha = 110°,9248$

$\Rightarrow$ l'angle aigu est $\beta = 180° - \alpha = 69°,0751 = 69°\ 04'31''$

7.2 Angle d'une droite et d'un plan.



<u>Définition</u> : L'angle d'une droite et d'un plan est l'angle aigu déterminé par cette droite et sa projection orthogonale sur ce plan. En pratique, on calculera l'angle β formé par le vecteur directeur de d et le vecteur normal au plan. On a alors $\alpha = 90° - \beta$

<u>Exemple</u> : $d \equiv \begin{cases} x = r \\ y = -\frac{5}{2}r + \frac{9}{2} \\ z = -\frac{1}{2}r + \frac{3}{2} \end{cases}$ $\qquad \pi \equiv 4x + y - 2z = 8$

$\vec{m}(1, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ vecteur directeur de d et $\vec{n}(4, 1, -2)$ un vecteur normal à π

$\Rightarrow \vec{m} \cdot \vec{n} = \|\vec{m}\| \cdot \|\vec{n}\| \cos\beta \Rightarrow \dfrac{5}{2} = \dfrac{\sqrt{30}}{2} \cdot \sqrt{21} \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{5}{\sqrt{30}\sqrt{21}} = 0.1992...$

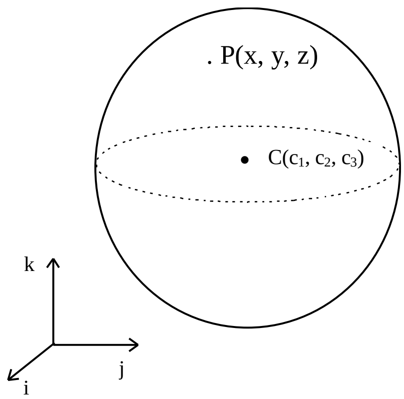
$\Rightarrow \beta = 78°,5095$
$\Rightarrow \alpha = 90° - 78°,5095 = 11°,490... = 11°\ 29'\ 26''$

7.3 Angle de deux plans.

<u>Définition</u> : l'angle aigu de deux plans est l'angle aigu formé par leurs vecteurs normaux.
<u>Exemple</u> : $\alpha \equiv 2x - 3y + z = 5$ et $\beta \equiv -x + 2y + 3z = 14$ Déterminer l'angle de α et β
Cherchons l'angle formé par les vecteurs normaux $\vec{m}(2, -3, 1)$ et $\vec{n}(-1, 2, 3)$

$\vec{m} \cdot \vec{n} = \|\vec{m}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos\theta \Leftrightarrow -5 = \sqrt{14}\sqrt{14}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{-5}{14} \Rightarrow \theta = 110°,9248...$ ou $\theta' = 180° - \theta = 69°,0751... = 69°\ 04'\ 31''$

8. Equation cartésienne de la sphère.



La sphère se définit de façon similaire au cercle :
$S = \{ P \in E : d(P,C) = r \in \mathbb{R}^+\}$
Soit $C(c_1, c_2, c_3)$ et $P(x, y, z)$
$P \in S \Leftrightarrow \overline{CP} = r$
$\Leftrightarrow (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = r^2$

$$\boxed{S \equiv (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = r^2}$$

ou encore : $x^2 + y^2 + z^2 - 2c_1x - 2c_2y - 2c_3z + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = r^2$
$\Rightarrow$ une équation du type $x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ est l'équation d'une sphère de centre $C(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}, -\frac{\gamma}{2})$ et de rayon

$r = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4\delta}}{2}$ ssi $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4\delta > 0$

9. Plans bissecteurs, bissectrices, plan médiateur (à partir d'exercices)

9.1 Plans bissecteurs

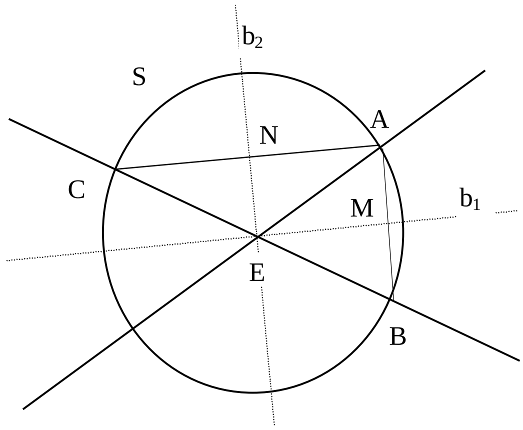
Déterminer l'équation des plans bissecteurs B_1 et B_2 des plans $\pi \equiv 2x - y + z - 4 = 0$ et $\pi' \equiv x + y - 2z + 1 = 0$ et montrer que ces plans bissecteurs sont orthogonaux.

Sol : soit P(α , β, γ) un point du plan bissecteur : d(P, π) = d (P, π') $\Rightarrow \frac{|2\alpha - \beta + \gamma - 4|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|\alpha + \beta - 2\gamma + 1|}{\sqrt{1+1+4}}$

$\Leftrightarrow 2x - y + z - 4 = \pm (x + y - 2z + 1) \Rightarrow B_1 \equiv x - 2y + 3z - 5 = 0$ et $B_2 \equiv 3x - z - 3 = 0$

Soit $\vec{m}(1, -2, 3)$ un vecteur normal à B_1 et $\vec{n}(3, 0, -1)$ un vecteur normal à B_2. Alors $\vec{m} \cdot \vec{n} = 3 + 0 - 3 = 0$ et donc $\vec{m} \perp \vec{n}$ et les plans bissecteurs sont bien orthogonaux.

9.2 Bissectrices.



Déterminer des équations paramétriques des bissectrices b_1 et b_2 des droites $d_1 \equiv \begin{cases} x = 4r + 1 \\ y = 2 \\ z = -3r \end{cases}$ et $d_2 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -12r + 2 \\ z = 5r \end{cases}$

Observons que d_1 et d_2 comprennent le point E(1, 2, 0) et ne sont pas //. On travaille donc dans le plan déterminé par les sécantes d_1 et d_2

Soit S une sphère de centre (1, 2, 0) et de rayon 1 :

$S \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 1$

Déterminons la coordonnée des points A, B et C comme dans la figure.

<u>Coordonnée de A</u> : $(4r + 1 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (-3r)^2 = 1$

$\Leftrightarrow 25r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm \frac{1}{5}$. Si $r = \frac{1}{5}$: $A\left(\frac{9}{5}, 2, \frac{-3}{5}\right)$

<u>Coordonnées de B et C</u> : $(1 - 1)^2 + (- 12r + 2 - 2)^2 + (5r)^2 = 1 \Leftrightarrow 169r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm \frac{1}{13}$

si $r = \frac{1}{13}$: $B(1, \frac{14}{13}, \frac{5}{13})$ si $r = -\frac{1}{13}$: $C(1, \frac{38}{13}, -\frac{5}{13})$

Soit M milieu de AB : $M(\frac{7}{5}, \frac{20}{13}, \frac{-7}{65})$ $b_1 = EM$ $\vec{EM}(\frac{7}{5}, \frac{-6}{13}, \frac{-7}{65})$

et N milieu de AC : $N(\frac{7}{5}, \frac{32}{13}, \frac{-32}{65})$ $b_2 = EN$ $\vec{EN}(\frac{2}{5}, \frac{6}{13}, \frac{-32}{65})$

et donc $b_1 \equiv \begin{cases} x = \frac{2}{5} r + 1 \\ y = -\frac{6}{13} + 2 \\ z = -\frac{7}{65} r \end{cases}$ et $b_2 \equiv \begin{cases} x = \frac{2}{5} r + 1 \\ y = \frac{6}{13} + 2 \\ z = -\frac{32}{65} r \end{cases}$

Vérifions $b_1 \perp b_2 \Leftrightarrow \vec{EM} \perp \vec{EN} \Leftrightarrow \vec{EM} \cdot \vec{EN} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{-6}{13} \cdot \frac{6}{13} + \frac{-7}{65} \cdot \frac{-32}{65} = 0$ et nous avons bien $b_1 \perp b_2$

9.3 Plan médiateur

Déterminer l'équation cartésienne du plan médiateur π de AB si A (1, 4, 2) et B (-3, 0, 6)

Solution : Soit M le milieu de AB. M(-1, 2, 4) et $\vec{AB}(- 4, - 4, 4)$

$\pi \equiv - 4x - 4y + 4z + d = 0$

Or $M \in \pi \Rightarrow 4 - 8 + 16 + d = 0 \Rightarrow d = - 12$ et $\pi \equiv - 4x - 4y + 4z - 12 = 0$

10. Exercices

10.1 Applications directes

1. Déterminer l'équation cartésienne de $\pi \ni A (1, 2, -3)$ et de vecteurs directeurs : $\vec{m}(3, 1, 2)$ et $\vec{n}(2, -1, 3)$
2. Déterminer l'équation cartésienne de $\pi \ni A (0, 1, 1)$ B (1, 0, 1) et C (1, 1, 0)

3. Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes de d ∋ A (1, -2, 0) et de vect. dir. $\vec{m}(3, 1, -4)$

4. $\pi_1 \equiv 2x - 3y + 5z - 1 = 0$ et $\pi_2 \equiv x - y + z - 1 = 0$
   Déterminer les équations paramétriques de $d = \pi_1 \cap \pi_2$ (préciser les composantes du vecteur directeur et la coordonnée d'un point de cette droite)

5. soit $\pi \equiv x - y + z - 3 = 0$ d_1 de vecteur directeur (1, 2, 1) et comprenant A(-1, 1, 2)
   d_2 comprend les points B(+1, 1, 2) et C (0, 3, 3)
   Déterminer les intersections respectives de ces droites avec π

6. $d_1 \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ $d_2 \equiv \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ Déterminer $d_1 \cap d_2$

7. $d_1 \equiv \begin{cases} x = r + 1 \\ y = -r + 2 \\ z = 2r - 1 \end{cases}$ $d_2 = \begin{cases} x = -s + 1 \\ y = s - 2 \\ z = 2s \end{cases}$ $d_3 \equiv \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = -s + 2 \\ z = s + 1 \end{cases}$ Déterminer $d_1 \cap d_2$ et $d_1 \cap d_3$

8. $d_1 \equiv \begin{cases} x = r + 1 \\ y = -r + 2 \\ z = 2r - 1 \end{cases}$ $d_2 \equiv \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ $d_3 \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$ $d_4 \equiv \begin{cases} x - y - z = 2 \\ 3x + y - z = 10 \end{cases}$
   $d_5 \equiv \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases}$ Déterminer les intersections de d_1 avec d_2, d_3, d_4 et d_5

9. $\pi \equiv 2x + 3y + 5z - 2 = 0$ d_1 de vecteur directeur (1, 1, -1) et ∋ (3, 2, 1) d_2 de vecteur directeur (3, 2, 1) et comprenant (1, 2, -1) et d_3 de vecteur directeur (4, 9, -7) et comprenant (0, 4, -2)
   Examiner les positions relatives de π avec d_1 , d_2 et d_3 (droite sécante, parallèle ou incluse dans π)

10. d_1 de vecteur directeur (3, 2, -1) et ∋ (1, -2, -3) d_2 de vecteur directeur (1, 2, -1) et ∋ (4, 2, -1)
    d_3 de vecteur directeur (-3, -2, 1) et ∋ (7, 2, -5) d_4 de vecteur directeur (-2, -4, 2) et ∋ (4, - 6, -1)
    comment sont situées les droites suivantes l'une par rapport à l'autre ? d_1 et d_2 ; d_1 et d_4 ; d_2 et d_4 ; d_1 et d_3 ? (parallèles, sécantes, gauches, confondues)

11. $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z + 5 = 0$ $\pi_2 \equiv 3x - y + 2z - 4 = 0$ $\pi_3 \equiv -4x + 6y - 2z - 10 = 0$
    $\pi_4 \equiv 6x - 2y + 4z + 5 = 0$
    Le plans π_1 et π_2 ; π_1 et π_3 ; π_2 et π_4 sont-ils parallèles, sécants, confondus ? (justifier)

12. d_1 de vecteur directeur (3, 2, -1) et ∋ (0, -1, 3) d_2 de vecteur directeur (1, 2, 7) et ∋ (2, 1, -1)
    d_3 de vecteur directeur (3, -2, 5) et ∋ (3, -1, 5) d_1 et d_2 ; d_1 et d_3 ; d_2 et d_3 sont - elles $\perp$? sécantes ?

13. $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z - 5 = 0$ $\pi_2 \equiv 3x - y - 9z + 7 = 0$ $\pi_3 \equiv 2x + y + z + 3 = 0$
    Ces plans sont-ils perpendiculaires ?

14. d ∋ (2, -1, 3) et $d \perp \pi \equiv 3x - y + 4z - 5 = 0$. Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes de d

15. Calculer la distance de A(-1, 4, 2) au plan $\pi \equiv 3x - 4y + z = 1$

16. Calculer la distance de A(-1, 2, 3) à $d \equiv \begin{cases} 4x + y - 5 = 0 \\ 3x - z - 2 = 0 \end{cases}$

17. Déterminer l'angle aigu formé par $\pi \equiv 2x + 3y + z - 18 = 0$ avec $d \equiv \begin{cases} x = 3r - 1 \\ y = r + 3 \\ z = -5r - 8 \end{cases}$

18. Déterminer l'angle aigu des plans π_1 et π_2
    a) si $\pi_1 \equiv 2x + y - z = 0$ et $\pi_2 \equiv x - 2y + 3z - 19 = 0$
    b) si $\pi_1 \equiv 2x - y + z - 4 = 0$ et $\pi_2 \equiv x + y + 2z + 1 = 0$

19. Déterminer l'équation cartésienne d'une sphère de centre (1, 2, 3) et de rayon 5

20. Déterminer l'équation de la sphère de centre (2, 1, 3) et tangente au plan $\pi \equiv 2x - 4y + z - 1 = 0$

21. a) $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z + 2 = 0$. Déterminer le centre et le rayon de cette sphère.

b) Déterminer la coordonnée des points d'intersection de la droite $d \equiv \begin{cases} x = r - 1 \\ y = 2r + 1 \\ z = -3r - 2 \end{cases}$ avec cette sphère.

Solutions :

1. $\pi \equiv -x + y + z + 2 = 0$
2. $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$
3. $d \equiv \begin{cases} x = 3r + 1 \\ y = r - 2 \\ z = -4r \end{cases}$ eq. cart. : $\begin{cases} x - 3y = 7 \\ z + 4y + 8 = 0 \end{cases}$
4. d ∍ (2, 1, 0) et de vect dir : (2, 3, 1)
5. $d_1 // \pi$ et $d_2 \cap \pi = P(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2})$
6. $d1 \cap d2 = \varnothing$: les droites sont gauches.
7. $d_1 \cap d_2 = \varnothing$: les droites sont gauches. $d_1 \cap d_3 = P(3, 0, 3)$: droites sécantes.
8. d_1 et d_2 sont gauches, $d_1$et d_3 sont sécantes au point $\left(\frac{9}{5}, \frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$, d_1 et d_4 sont parallèles, $d_1 = d_5$
9. a) $d_1 // \pi$ b) $d_2 \cap \pi = P\ (\left(\frac{14}{17}, \frac{32}{17}, -\frac{18}{17}\right)$ c) $d_3 \subset \pi$
10. $d_1$et $d_2$gauches $d_1$et $d_3$confondues $d_1$et $d_4$sécantes : $d_1 \cap d_4 = P\left(\frac{17}{2}, 3, -\frac{11}{2}\right)$
    $d_2$et d_4 sont // distinctes : $d_2 \cap d_4 = \varnothing$
11. π_1 et π_2 sont sécants : $\pi_1 \cap \pi_2 = d \equiv \begin{cases} x = -\frac{5}{7} r + \frac{17}{7} \\ y = -\frac{r}{7} + \frac{23}{7} \\ z = r \end{cases}$ $\pi_1 = \pi_3$et $\pi_2 // \pi_4$($\pi_2$distinct de π_4)
12. $d_1 \perp d_2$ et d_1 et d_2 gauches, $d_1 \perp d_3$ et $d_1 \cap d_3 = P\ \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}\right)$ d_2 et d_3 non $\perp$ et gauches.
13. $\pi_1 \perp \pi_2$ π_1 pas $\perp \pi_3$ et π_2 pas $\perp \pi_3$
14. $d \equiv \begin{cases} x = 3r + 2 \\ y = -r - 1 \\ z = 4r + 3 \end{cases}$ eq cartésiennes : $\begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ z + 4y + 1 = 0 \end{cases}$
15. distance = $\dfrac{\sqrt{2106}}{13} = \dfrac{9\sqrt{26}}{13}$
16. distance = 3
17. 10,41°
18. a) 70,89° b) 60°
19. $S \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$
20. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = \dfrac{4}{21}$
21. a) C(-1, 1, -2) r = 2 Intersection : $\left(\sqrt{\frac{2}{7}} - 1, 2\sqrt{\frac{2}{7}} + 1, -3\sqrt{\frac{2}{7}} - 2\right)$ et $\left(-\sqrt{\frac{2}{7}} - 1, -2\sqrt{\frac{2}{7}} + 1, 3\sqrt{\frac{2}{7}} - 2\right)$

10.2 Exercices de synthèse

1. Calculer la distance entre les plans : $\pi_1 \equiv 2x - y + z - 1 = 0$ et $\pi_2 \equiv 2x - y + z - 5 = 0$
2. Soit π de vecteurs directeurs $\vec{u}\,(2, -1, 1)$ et $\vec{v}\,(0, 1, 1)$ et comprenant le point A(1, -1, 0). Déterminer les équations paramétriques de la droite d $\perp$ à π et comprenant le point B(1, 0, 1)
3. $\alpha \equiv 3x - y + z = 1$ $\beta \equiv 2x - z - 4 = 0$ $i = \alpha \cap \beta$ $\gamma \perp \alpha$ et $\gamma \perp \beta$
   a) Déterminer les équations paramétriques de i
   b) Déterminer l'équation cartésienne de γ sachant que $\gamma \ni (-1, 2, 1)$
   c) Déterminer l'angle aigu de α et β
4. Déterminer m pour que le plan $\pi \equiv 2x-y+mz=1$ forme avec la droite $d \equiv \begin{cases} x - 3y = 3 \\ 3y + z = 1 \end{cases}$ un angle de 30°
5. A(1, -1, 2) B(2, 1, 0) et C (4, -1, -1)
   a) Vérifier que le triangle ABC est rectangle isocèle de sommet B
   b) Déterminer les coordonnées de D pour que la figure ABCD soit un carré.
   c) Déterminer les coordonnées de A', B', C' et D' pour que le solide ABCDA'B'C'D' soit un cube.
6. Déterminer l'équation cartésienne de π sachant que la perpendiculaire à π passant par Q(3,4,5) rencontre π au point R(2, 1, 0)
7. Déterminer a et b sachant que $\pi \perp \pi'$ et π//oy si $\pi \equiv x + ay + bz = 2$ et $\pi' \equiv x + y + z = 4$
8. a) Déterminer la perpendiculaire commune aux droites : $d_1 \equiv \begin{cases} x = r + 1 \\ y = -r + 2 \\ z = 2r - 1 \end{cases}$ et $d_2 \equiv \begin{cases} x = -s + 1 \\ y = s - 2 \\ z = 2s \end{cases}$
   b) Préciser les points d'intersection de cette perpendiculaire avec d_1 et d_2
   c) Calculer la distance entre d_1 et d_2
9. $d_1 \equiv \begin{cases} x = 2k + 7 \\ y = k + 1 \\ z = 3k + 9 \end{cases}$ $d_2 \equiv \begin{cases} 3x - y + 3z = 5 \\ 5x + y + z = 3 \end{cases}$
   Déterminer les équations paramétriques et cartésienne du plan π comprenant la droite d_1 et parallèle à la droite d_2
10. $\pi_1 \equiv x - ay + z = 2$ $\pi_2 \equiv x + y - az = 2$ $\pi_3 \equiv x - y + z = 0$
    Déterminer les positions relatives de ces 3 plans en utilisant la méthode de discussions de systèmes d'équations.

<u>*Solutions :*</u>

1) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ 2) $\begin{cases} x = 1 - r \\ y = -r \\ z = 1 + r \end{cases}$ 3) a) $i \equiv \begin{cases} x = r \\ y = 5r - 5 \\ z = 2r - 4 \end{cases}$ b) $\gamma \equiv x + 5y + 2z - 11 = 0$ c) 47,61°

4. $m = \dfrac{60 - \sqrt{3515}}{17}$ 5) a) $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = 3$ et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ b) D (3, -3, 1)
   c) A' (3, 0, 4) B' (4, 2, 2) C' (6, 0, 1) et D' (5, -2, 3)
   ou A'' (-1, -2, 0) B'' (0, 0, -2) C'' (2, -2, -3) et D'' (1, -4, -1)
6. $\pi \equiv x + 3y + 5z - 5 = 0$ 7) a = 0, b = -1
8. a) $AB \equiv \begin{cases} x = \frac{9}{4} - 2r \\ y = \frac{3}{4} - 2r \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$ b) $A\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right) \in d_1$ et $B\left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right) \in d_2$ c) $d(d_1, d_2) = 2\sqrt{2}$
9. $\pi \equiv x + y - z + 1 = 0$
10. Si a = 1 : système impossible : π_1 // π_3 et π_2 coupe chacun des deux autres.
    Si a = -1 : système indéterminé : $\pi_1 = \pi_2$ et π_3 sécant aux deux autres selon la droite $d \ni (1, 1, 0)$ et de vecteur

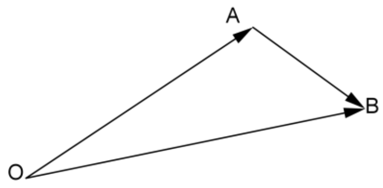
directeur $\vec{v}\,(-1, 0, 1)$

Si $a \neq \pm 1$: $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \left\{\left(0, \frac{-2}{a-1}, \frac{-2}{a-1}\right)\right\}$

11. Les essentiels.

11.1 Généralités

Soient A et B, deux points du plan de coordonnées respectives (a_1,a_2) et (b_1,b_2)



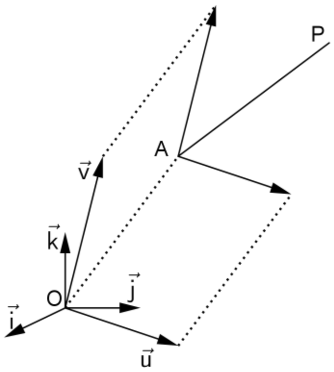
Relation de Chasles : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow$ composantes de $\overrightarrow{AB}$ = composantes de $\overrightarrow{OB}$ - composantes de $\overrightarrow{OA}$

ou encore : composantes de $\overrightarrow{AB}$ = "extrémité" – "origine"

11.2 Equations d'un plan

$\pi \ni A(a_1, a_2, a_3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$



<u>*Equation vectorielle*</u> : $P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + r\vec{u} + s\vec{v}$

<u>*Equations paramétriques*</u> : $\pi \equiv \begin{cases} x = a_1 + ru_1 + sv_1 \\ y = a_2 + ru_2 + sv_2 \\ z = a_3 + ru_3 + sv_3 \end{cases}$

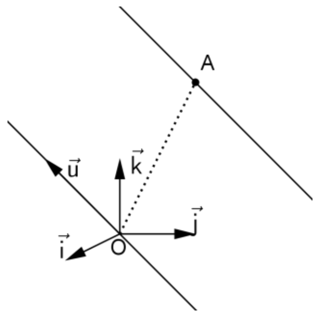
<u>*Equation cartésienne*</u> : $\begin{vmatrix} x - a_1 & u_1 & v_1 \\ y - a_2 & u_2 & v_2 \\ z - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

On obtient une équation de la forme ax + by + cz + d = 0

<u>*Remarque*</u> : $\pi \ni$ 3 points distincts non alignés A, B et C $\Leftrightarrow \pi \ni$ A et a comme vecteurs directeurs les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (ou $\pi \ni$ B et a comme vecteurs directeurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ou …)

11.3 Equations d'une droite.

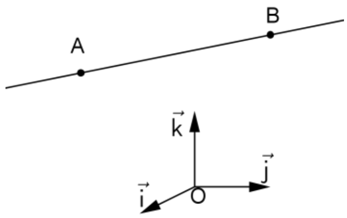
d $\ni$ A et de vecteur directeur $\vec{u}$



<u>*Equation vectorielle*</u> : $P \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + r\vec{u}$

<u>*Equations paramétriques*</u> : $d \equiv: \begin{cases} x = a_1 + ru_1 \\ y = a_2 + ru_2 \\ z = a_3 + ru_3 \end{cases}$

<u>*Equation cartésienne :*</u> On détermine l' équation cartésienne de d en éliminant le paramètre entre les équations paramétriques, et on obtient alors deux équations linéaires en x, y, z qui sont les équations cartésiennes de deux plans dont l'intersection est d.



<u>Remarque</u> : d $\ni$ 2 points distincts A et B $\Leftrightarrow$ d $\ni$ A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ (ou $\ni$ B et …)

11.4 Intersections de droites et de plans. Parallélisme.

On étudiera les systèmes formés par les droites et les plans considérés en interprétant les résultats obtenus.

<u>*Plans parallèles*</u>

$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ $\qquad\qquad \pi' \equiv a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$\pi \,//\, \pi' \Leftrightarrow \exists\, k \in R_0 : (a, b, c) = k\,(a', b', c')$

- Les deux plans seront parallèles confondus si de plus $d = kd'$
- Ils seront parallèles distincts si $d \neq kd'$

<u>*Droites parallèles.*</u>

Deux droites sont parallèles ⇔ leurs vecteurs directeurs sont multiples l'un de l'autre.
La recherche de l'intersection de 2 droites se fait le plus aisément lorsque les droites sont données l'une (d_1) par ses équations paramétriques et l'autre (d_2) par ses équations cartésiennes. En remplaçant la valeur des coordonnées d'un point courant de d_1 dans les équations de d_2 on obtient un système de 2 équations à une inconnue (le paramètre).
Si ce système est impossible, les droites sont parallèles ou gauches selon que leurs vecteurs directeurs sont parallèles ou non.
Si ce système admet une solution unique, les droites sont sécantes (et on obtient les coordonnées du point d'intersection en remplaçant le paramètre par sa valeur dans les équations paramétriques de d_1).
Et enfin, si ce système est indéterminé, les 2 droites sont confondues.

<u>*Droites et plans parallèles*</u>

Pour déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan, on recherchera d'abord les équations paramétriques de d et l'équation cartésienne de π. On exprimera alors qu'un point de d doit vérifier l'équation de π, ce qui nous donnera une équation du premier degré en r (paramètre de d). La droite perce le plan, lui est parallèle ou y est incluse selon que l'équation obtenue admet une solution unique, est impossible ou indéterminée.

<u>*Remarques :*</u>

- L'équation cartésienne d'un plan parallèle à l'un des axes de coordonnées ne comprend pas la variable correspondante.
- L'équation cartésienne d'un plan parallèle à l'un des plans de coordonnées ne comprend qu'une variable : celle qui correspond à l'axe sécant au plan

11.5 Orthogonalité.

Le produit scalaire : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |AB|\,.\,|AC|.\cos\alpha$

<u>*Propriétés :*</u>

1. Le produit scalaire de deux vecteurs vaut le produit de la longueur de l'un d'eux par la projection orthogonale de l'autre sur le premier.
2. a) $\vec{AB} \,.\, \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{AB}$

   b) $r\,\vec{AB} \cdot s\,\vec{AC} = rs\ \vec{AB} \cdot \vec{AC}$

   c) $\vec{AB} \cdot (\vec{CD} + \vec{EF}) = \vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AB} \cdot \vec{EF}$
3. La norme d'un vecteur notée $\|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB}^{\,2}} = |AB|$

Un vecteur est dit normé lorsque sa norme vaut un.

4. Vecteurs orthogonaux : $\vec{AB} \perp \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$
5. Un repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit orthonormé ⇔ les vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont normés et orthogonaux 2 à 2
6. Soit dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les vecteurs $\vec{OA}$ (a_1, a_2, a_3) et $\vec{OB}$ (b_1, b_2, b_3)

alors : $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = a_1b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3$ $\qquad$ et $\qquad \|\vec{OA}\| = \sqrt{\vec{OA}^{\,2}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

<u>*Droites orthogonales*</u>

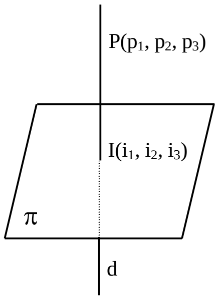
2 droites sont orthogonales ⇔ leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux ⇔ le produit scalaire de ceux-ci = 0.

Droites et plans perpendiculaires.
Etant donné un plan $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$
Alors : • le vecteur $\vec{n}$ (a, b, c) est orthogonal à π (ou normal à π)
• $d \perp \pi \Leftrightarrow$ le vecteur directeur de d est multiple de $\vec{n}$

Plans perpendiculaires.
$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}'$ où $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont des vecteurs normaux respectivement à π et π' $\Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$

11.6 Distances

Distance d'un point P à un plan π



Soit P (p_1, p_2, p_3) et $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$: $d(P, \pi) = \dfrac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

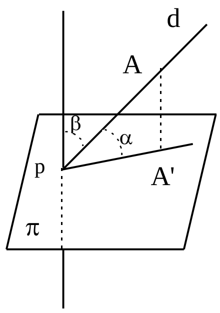
On peut aussi mener la perpendiculaire à π comprenant le point P et rechercher ensuite le point d'intersection de cette droite avec π : I. $d(P, \pi) = d(P, I)$

Distance d'un point P à une droite d.
On détermine l'équation du plan $\pi \ni P$ et $\perp$ d
On cherche ensuite le point d'intersection I de ce plan avec la droite d :
$d(P,d) = d(P, I)$

11.7 Angles

Pour déterminer l'angle α formé par deux vecteurs, on calcule le produit scalaire entre ces vecteurs d'une part à partir de la définition (produit des normes par le cosinus de l'angle entre les vecteurs) et d'autre part en exprimant le produit scalaire dans une base orthonormée. En égalant ces deux expressions, on obtient une équation qui nous permet de déterminer le cos α et par conséquent la valeur de α

Angle de deux droites.
Les angles formés par deux droites sont ceux que forment leurs vecteurs directeurs.



Angle d'une droite et d'un plan.
L'angle α d'une droite et d'un plan est l'angle aigu déterminé par cette droite et sa projection orthogonale sur ce plan. En pratique, on calculera l'angle β formé par le vecteur directeur de d et le vecteur normal au plan. On a alors $\alpha = 90° - \beta$

Angle de deux plans.
L'angle aigu de deux plans est l'angle aigu formé par leurs vecteurs normaux.