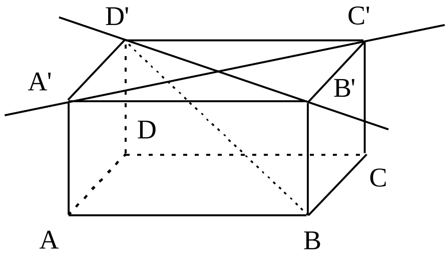
XI. Géométrie dans l'espace.

1. Rappel des notions vues en quatrième.

1.1 Positions relatives des plans et des droites

Considérons le parallélépipède rectangle ABCDA'B'C'D' ci-contre :



1.1.1 Deux plans peuvent être

- confondus. (ex. : A'D'C' et D'C'B')
- parallèles disjoints. (ex. : A'D'D et B'C'C)
- sécants. (D'C'B' et B'C'C)

1.1.2 Une droite et un plan

- La droite peut être incluse dans le plan. (ex : D'B' $\subset$ A'D'C')
- La droite et le plan peuvent être disjoints. (ex : la droite D'B' et le plan ABCD)
- La droite et le plan peuvent être sécants. (ex. : la droite D'B et le plan ABCD)

1.1.3 Deux droites peuvent être

- confondues
- parallèles disjointes (ex. : AA' et BB') Dans ce cas elles sont coplanaires.
- gauches (ex. : AA' et BC) Dans ce cas elles ne sont pas coplanaires.
- sécantes (ex : D'B' et A'C')

Propriété

Deux plans distincts α et β ayant un point commun ont au moins une droite commune comprenant ce point.

1.2 Droites parallèles

Définition : Deux droites de l'espace sont parallèles lorsqu'elles sont coplanaires et non sécantes.

Propriétés.

- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles : $(d_1 \parallel d_2 \text{ et } d_2 \parallel d_3) \Rightarrow d_1 \parallel d_3$
- Il existe une et une seule droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée.
- Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.

1.3 Plans parallèles

Définition : Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants.

Conséquence : Etant donné 2 plans α et β , $\alpha \parallel \beta \Rightarrow \alpha = \beta$ (plans confondus) ou $\alpha \cap \beta = \varnothing$ (plans disjoints)

Propriétés.

- Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux : $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ et $\alpha_2 \parallel \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 \parallel \alpha_3$
- Il existe un et un seul plan passant par un point donné et parallèle à un plan donné.
- Si 2 plans sont parallèles :
  - a) toute droite de l'un est parallèle à l'autre
  - b) toute droite qui perce l'un perce l'autre.
  - c) tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et **les droites d'intersection sont parallèles**.

1.4 Droite et plan parallèles

Définition : Une droite et un plan sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants.

Conséquence : $d \parallel \alpha \Rightarrow d \subset \alpha$ (droite contenue dans α) ou $d \cap \alpha = \varnothing$ (d et α sont disjoints)

Exemples.

On peut obtenir une droite d et un plan α parallèles

- A partir de deux plans parallèles : toute droite de l'un est parallèle à l'autre
  (ex. : A'B'C'D' // ABCD $\Rightarrow$ D'B' // ABCD car D'B' $\subset$ dans A'B'C'D')

- A partir de deux droites parallèles : tout plan contenant l'une est parallèle à l'autre.
  (ex. : AB // A'B' et ABC'D' contient AB $\Rightarrow$ ABC'D' // A'B')

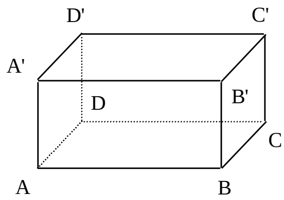
Propriétés.
Le parallélisme "droite - plan" est conservé lorsqu'on remplace la droite par une droite parallèle et le plan par un plan parallèle : (d // π et d // d' et π // π') $\Rightarrow$ d' // π'

1.5 Critères.

1. Critère de parallélisme d'une droite et un plan
   Une droite est parallèle à un plan ssi elle est parallèle à une droite de ce plan
   c-à-d : $d \,//\, \pi \Leftrightarrow \exists\, d' \subset \pi \mid d \,//\, d'$

2. Critère de parallélisme de deux plans
   Deux plans sont parallèles ssi l'un d'eux contient deux droites sécantes respectivement parallèles à l'autre.
   c-à-d : $\pi_1 \,//\, \pi_2 \Leftrightarrow \exists\, d_1 \text{ et } d_2 \subset \pi_1,\ d_1 \cap d_2 = \{A\} \mid d_1 \,//\, \pi_2 \text{ et } d_2 \,//\, \pi_2$

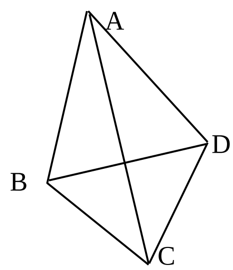
2. Exercices de révision.



1. Dans le parallélépipède ci-contre, les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes AB, A'B' et D'C':
   1° Montrer que B, C, K et J sont dans un même plan désigné par α.
   2° Prouver que ID' est parallèle à α.

2. Bimédianes d'un tétraèdre.
   Note : on appelle arêtes opposées d'un tétraèdre, des arêtes n'ayant pas de sommet en commun.
   Montrer que, dans un tétraèdre, les trois segments joignant les milieux des arêtes opposées sont concourants et se coupent en leurs milieux

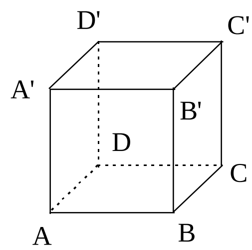
   Ces droites sont appelées bimédianes du tétraèdre.



3. Démontrer que les diagonales d'un cube se coupent en leur milieu

4. Deux plans α et β se coupent selon une droite d.
   P et Q $\in$ d.   A $\in \alpha$ et A $\notin \beta$ B $\in \beta$ et B $\notin \alpha$.
   APBQ est appelé quadrilatère gauche.
   Démontrer que les milieux des côtés de ce quadrilatère sont les sommets d'un parallélogramme.

5. Dans le cube standard d'arête a, démontrer que le triangle AB'D' est équilatéral.
   Calculer l'aire de ce triangle en fonction de a



6. Soit a et b deux droites sécantes d'un plan γ et un point P n'appartenant pas à ce plan. Construire l'intersection du plan α, déterminé par P et a et du plan β déterminé par P et b.

7. Dans le tétraèdre ABCD, P est le centre de gravité du triangle ABC et Q est le centre de gravité du triangle ACD. Démontrer que PQ est parallèle à BD.

8. Dans le cube ABCDA'B'C'D', M,N,P et Q sont les milieux respectifs des arêtes AB, C'D', BC et CC'.
   Démontrer que les droites MN et PQ sont parallèles.

9. Dans le tétraèdre ABCD : A', B', C' sont les milieux respectifs des arêtes BC, AC et AB.
   Démontrer que les plans DAA' , DBB' et DCC' se coupent en une seule droite.

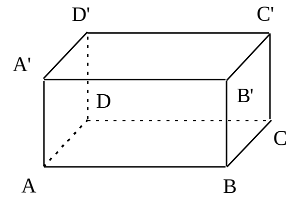
10. Démontrer que dans un tétraèdre régulier d'arête a, les centres de gravité de chacune des faces sont les sommets d'un tétraèdre régulier. Calculer la mesure de l'arête de ce tétraèdre en fonction de a.

3. Orthogonalité.

3.1 Droites orthogonales

Définition
Deux droites sont orthogonales lorsque leurs parallèles menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.

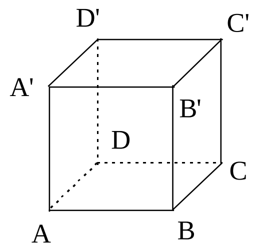
Exemple.
Sur le parallélépipède standard, considérons les arêtes A'D' et B'B. Leurs parallèles respectives menées par le point C' (B'C' et CC') sont perpendiculaires.
Les droites A'D' et B'B sont dites orthogonales.
On notera : A'D' $\perp$ B'B



Conséquences
- 2 droites perpendiculaires sont orthogonales
- 2 droites gauches sont orthogonales si la parallèle à l'une menée par un point de l'autre est perpendiculaire à la première.

Propriétés.
- L'orthogonalité de deux droites est conservée lorsqu'on remplace chacune d'elle par une parallèle.
  $(d_1 \perp d_2 \text{ et } d_1' // d_1 \text{ et } d_2' // d_2) \Rightarrow d_1' \perp d_2'$
- Dans un plan, il existe une et une seule droite comprenant un point donné et $\perp$ à une droite donnée.
- Dans l'espace, il existe une infinité de droites passant par un point donné et $\perp$ à une droite donnée.

Application.
Dans le cube ci-contre, les droites BD et A'C' sont orthogonales.
En effet, A'C' $\perp$ D'B' (diagonales d'un carré)
De plus D'B' // BD (car BB'D'D est un parallélogramme car BB' et DD' sont parallèles et de même longueur)
Et nous avons bien A'C' $\perp$ BD

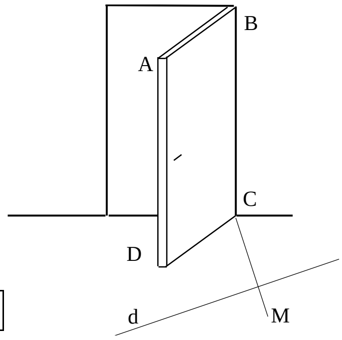


3.2 Droites et plans orthogonaux

3.2.1 Définition

Une droite d et un plan α sont orthogonaux lorsque la droite d est orthogonale à toute droite du plan α

Cette notion se conçoit aisément en observant le mouvement d'une porte.
Si nous considérons une porte ABCD tournant autour de sa charnière BC Cette porte ne se déforme pas durant le mouvement : les côtés BC et CD demeurent perpendiculaires. Le côté CD glisse sur le plancher.
On peut, sur le sol, dessiner une droite CM quelconque et faire coïncider le côté de la porte CD avec cette droite CM (quel que soit le point M choisi) $\Rightarrow$ CB $\perp$ CM
Et la charnière CB est perpendiculaire à toute droite du plancher qui passe par C.
Toute droite d dans le plan du sol ne comprenant pas le point C est parallèle à une droite dans le plan du sol et comprenant le point C $\Rightarrow$ BC $\perp$ d



Conséquence : si une droite est $\perp$ à un plan alors elle est $\perp$ à toute droite de ce plan.

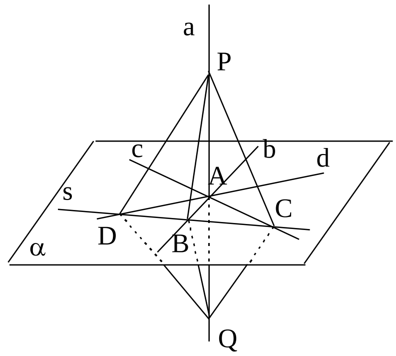
3.2.2 Critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan

Si une droite est orthogonale (ou perpendiculaire) à deux droites sécantes d'un plan, alors cette droite est orthogonale à ce plan.

Schéma : http://www.geogebratube.org/material/show/id/34130

1er cas : Hypothèse : Soit un plan α et une droite a | $a \cap \alpha = \{A\}$
$b \subset \alpha$ et $c \subset \alpha$
$b \cap c = \{A\}$
$a \perp b$ et $a \perp c$
Soit d une droite quelconque de α comprenant A

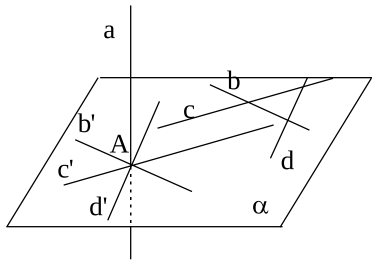
Thèse : $a \perp d$



Démonstration :
Sur a, on choisit les points P et Q, de part et d'autre de A, à égale distance de A. Dans α, on trace une droite s, ne comprenant pas A, coupant b en B, c en C et d en D.
Nous allons montrer que le triangle PDQ est isocèle.

1. Les Δ PAB et QAB sont isométriques car : a) $\overline{PA} = \overline{AQ}$ (par constr.)
   b) $P\hat{A}B = Q\hat{A}B = 90°$ (par hyp.) et c) AB est un côté commun
   $\Rightarrow \overline{PB} = \overline{QB}$ (1)
2. Les Δ PAC et QAC sont isométriques car : a) $\overline{PA} = \overline{AQ}$ (par constr..)
   b) $P\hat{A}C = Q\hat{A}C = 90°$ (par hyp.) et c) AC est un côté commun
   $\Rightarrow \overline{PC} = \overline{QC}$ (2)
3. Les Δ PCB et QCB sont isométriques car : a) $\overline{PB} = \overline{QB}$ (1) b) $\overline{PC} = \overline{QC}$ (2)
   et c) BC est un côté commun
   $\Rightarrow P\hat{C}B = Q\hat{C}B$ (4)
4. Les Δ PDC et QDC sont isométriques car : a) $\overline{PC} = \overline{QC}$ (2) b) $\overline{CD}$ = côté commun
   et c) $P\hat{C}D = Q\hat{C}D$ (4)
   $\Rightarrow \overline{PD} = \overline{QD}$

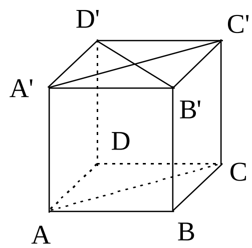
Et nous avons ainsi prouvé que le triangle PDQ est isocèle $\Rightarrow$ La médiane issue du sommet D est aussi hauteur relative au côté PQ $\Leftrightarrow a \perp d$ cqfd !



2ème cas : b, c et d sont quelconques dans α

Par A on trace b', c' et d' respectivement parallèles à b, c et d.
$a \perp b'$ car $a \perp b$ et $b' \parallel b$
$a \perp c'$ car $a \perp c$ et $c' \parallel c$
$\Rightarrow a \perp d'$ (par le premier cas)
$a \perp d$ car $a \perp d'$ et $d \parallel d$

Conséquence :
Pour prouver qu'une droite est orthogonale à un plan, on peut se contenter de prouver qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



Exemple.
Soit à prouver sur le cube ci-contre que la droite D'B' est orthogonale au plan AA'C'C.
Démonstration : $AA' \perp A'B'$ et $AA' \perp A'D'$ (car arêtes consécutives du cube)
$\Rightarrow AA' \perp A'B'D'$ (car $AA' \perp$ 2 droites sécantes de ce plan) $\Rightarrow AA' \perp$ à toute droite de ce plan. $\Rightarrow$ En particulier, $AA' \perp D'B'$
Or $D'B' \perp A'C'$ (diagonales d'un carré)
D'B' est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan AA'C'C
$\Leftrightarrow D'B' \perp$ plan AA'C'C
N.B. on peut aussi en conclure $D'B' \perp A'C$, $D'B' \perp AC'$ ...

Propriétés

- L'orthogonalité "droite - plan" est conservée lorsqu'on remplace la droite par une droite parallèle et le plan par un plan parallèle : ($d \perp \pi$, $d \parallel d'$ et $\pi \parallel \pi'$) $\Rightarrow d' \perp \pi'$)
- Il existe une et une seule droite passant par un point donné et orthogonale à un plan donné.
- Il existe un et un seul plan passant par un point donné et orthogonal à une droite donnée.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles : ($d \perp \pi$ et $d' \perp \pi$) $\Rightarrow d \parallel d'$
- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles : ($\pi \perp d$ et $\pi' \perp d$) $\Rightarrow \pi \parallel \pi'$

3.2.3 Critère d'orthogonalité de deux droites

Deux droites sont orthogonales si l'une d'elles est incluse dans un plan perpendiculaire à l'autre.

Hypothèse : Soit les 2 droites a et b et le plan α Thèse : $a \perp b$
$a \subset \alpha$ $b \perp \alpha$

Démonstration
$b \perp \alpha \Rightarrow b \perp$ à toute de droite de $\alpha \Rightarrow b \perp a$

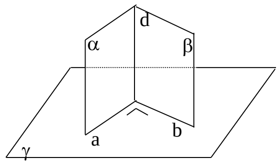
3.3 *Plans perpendiculaires*

3.3.1 Définition

Deux plans sont perpendiculaires ssi tout plan perpendiculaire à leur droite d'intersection coupe ces plans selon deux droites perpendiculaires

Si $\alpha \cap \beta = d$ et $\gamma \perp d$, $\gamma \cap \alpha = a$ et $\gamma \cap \beta = b$

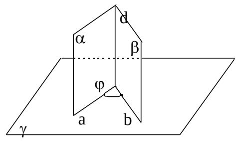
Alors : $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow a \perp b$



Remarque

Par extension, l'angle formé par deux plans (α et β) est l'angle formé par les droites d'intersection (a et b) d'un plan γ perpendiculaire à $\alpha \cap \beta$, avec les plans α et β

Sur la figure ci-contre, l'angle entre le plan α et le plan β est l'angle φ



3.3.2 Critère d'orthogonalité de 2 plans

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient perpendiculaires est que l'un d'eux contienne une droite orthogonale à l'autre.
Autre formulation : deux plans sont perpendiculaires $\Leftrightarrow$ l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre.

1ère partie : la condition est nécessaire.($\Rightarrow$)

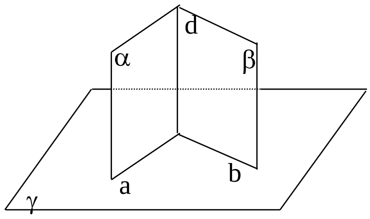
Hypothèse

Soient les plans α, β

$\alpha \perp \beta$ et $\alpha \cap \beta = d$

Thèse

$\exists\, d' \subset \alpha \mid d' \perp \beta$



Démonstration

Soit $\gamma \perp d \mid \gamma \cap \alpha = a$ et $\gamma \cap \beta = b$

$\gamma \perp d \Rightarrow d \perp$ à toute droite de γ (car une droite $\perp$ à un plan est $\perp$ à toute droite de ce plan) $\Rightarrow d \perp a$

Par hypothèse : $\alpha \perp \beta \Rightarrow a \perp b$

$a \perp b$ et $a \perp d \Rightarrow a \perp \beta$ (car une droite $\perp$ à 2 droites sécantes d'un plan est $\perp$ à ce plan)

Et nous avons ainsi trouvé une droite d' = a dans le plan α perpendiculaire au plan β : cqfd

2ème partie : la condition est suffisante ($\Leftarrow$)

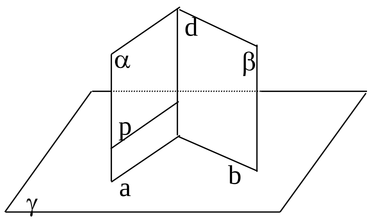
Hypothèse

Soient les plans α, $\beta \mid \alpha \cap \beta = d$

$p \subset \alpha$ et $p \perp \beta$

Thèse

$\alpha \perp \beta$



Démonstration

$\gamma \perp d \mid \gamma \cap \alpha = a$ et $\gamma \cap \beta = b$

$\gamma \perp d \Rightarrow d \perp a$ (une droite perpendiculaire à un plan est perpendiculaire à toute droite de ce plan)

$p \perp \beta$ (par hyp) $\Rightarrow p \perp d$ (une droite perpendiculaire à un plan est perpendiculaire à toute droite de ce plan)

Dans le plan α, $p \perp d$ et $a \perp d \Rightarrow p$ // a (car dans un plan, deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles)

Or, $p \perp \beta \Rightarrow a \perp \beta$ (car si deux droites sont parallèles et que l'une d'elles est perpendiculaire à un plan, alors l'autre est aussi perpendiculaire à ce plan)

$\Rightarrow a \perp$ à toute droite de β : en particulier à b : $a \perp b$

Le plan γ coupe donc les plans α et β selon deux droites perpendiculaires : $\alpha \perp \beta$: cqfd

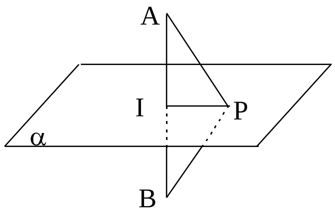
4. Plan médiateur

Définition
On appelle plan médiateur d'un segment [AB] ($A \neq B$), le plan perpendiculaire à la droite AB passant par le milieu du segment [AB]

Le plan médiateur dans l'espace joue un rôle analogue à celui de la médiatrice dans le plan. La propriété suivante l'exprime.

Propriété

Soit α le plan médiateur d'un segment [AB]
a) Tout point P de α est équidistant de A et de B
b) et réciproquement : tout point P de l'espace situé à égale distance des extrémités de [AB] est un point de α.



a) Hypothèse : α : le plan médiateur de [AB]
$P \in \alpha$ et $\{I\} = AB \cap \alpha$

Thèse : $d(P, A) = d(P, B)$

Démonstration :
$AB \perp \alpha$, $P \in \alpha$ et $I \in \alpha \Rightarrow AB \perp PI$
$\Rightarrow$ dans le plan ABP, PI est la médiatrice de AB.
$\Rightarrow d(P, A) = d(P, B)$ (par la propriété de la médiatrice) (cqfd.)

b) Hypothèse : α : le plan médiateur de [AB]
$\{I\} = AB \cap \alpha$
$d(P, A) = d(P, B)$

Thèse : $P \in \alpha$

Démonstration :
Dans le plan ABP, $d(P, A) = d(P, B) \Rightarrow P \in$ médiatrice de $AB \Rightarrow PI \perp AB \Rightarrow PI \subset \alpha$
et donc nous avons bien $P \in \alpha$ (cqfd)

La propriété ci-dessus peut également s'énoncer :

Dans l'espace, le plan médiateur d'un segment est le lieu des points équidistants des extrémités du segment.

5. En résumé : comment démontrer ?

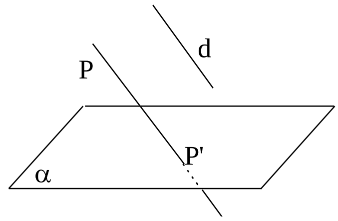
Qu'une droite est perpendiculaire à un plan :
- Démontrer que cette droite est perpendiculaire à 2 droites sécantes du plan
- Ou démontrer que le plan est le plan médiateur d'un segment de la droite (ce qui revient à montrer que 3 points du plan sont à égale distance des extrémités du segment)

Que 2 droites sont orthogonales :
- Démontrer que l'une d'elles est dans un plan perpendiculaire à l'autre
- ou montrer que l'une d'elles est dans le plan médiateur d'un segment de l'autre (ce qui revient à montrer que 2 de ses points sont à égale distance des extrémités du segment)

Que 2 plans sont perpendiculaires :
- Montrer qu'un 3ème plan perpendiculaire à la droite d'intersection des 2 plans coupe ceux-ci selon 2 droites perpendiculaires
- Montrer que l'un d'eux contient une droite perpendiculaire à l'autre.

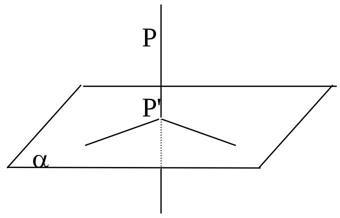
6. Projections - distances

6.1 Projeté d'un point



Soit une droite d et un plan α non parallèles.
Par un point P de l'espace menons la parallèle à d passant par P : cette droite est sécante avec α en un point P' qui, par définition est le projeté de P sur α parallèlement à d. La projection sur α selon d associe à tout point P son projeté P'.

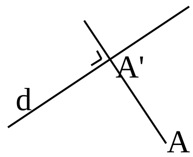
6.2 Projection orthogonale



La droite orthogonale à α menée du point P perce le plan α en P' qui est le projeté orthogonal de P sur α (ou la projection orthogonale de P sur α)

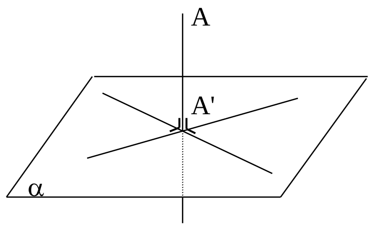
6.3 Distances

6.3.1 Distance d'un point à une droite



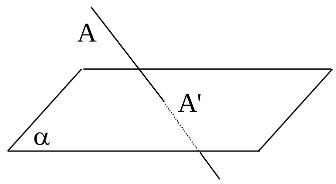
La question se résume à un problème de géométrie plane : d(A, d)= d(A, A') où A' est le pied de la perpendiculaire à d menée par le point A

6.3.2 Distance d'un point à un plan.

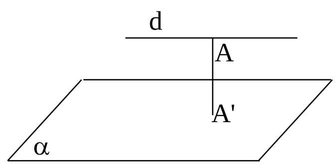


d(A, α) = d(A, A') où A' est le point de percée de la perpendiculaire au plan α issue de A (ou encore où A' est le projeté orthogonal de A)

6.3.3 Distance d'une droite à un plan



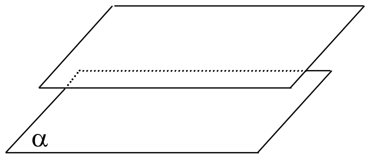
a) Si la droite est sécante au plan, le problème n'a pas de sens.



b) Si la droite est parallèle au plan, alors d(d, α) = distance d'un point quelconque de d à α

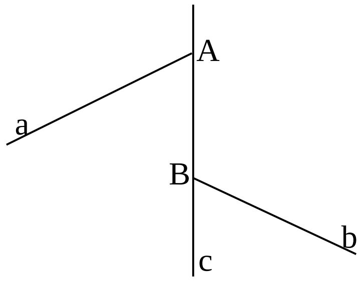
6.3.4 Distance entre deux plans.

a) Si les plans sont sécants, le problème n'a pas de sens.



b) Si les plans sont parallèles, alors d(α, β) = distance d'un point quelconque de α à β
Et on est ainsi ramené au problème de la distance d'un point à un plan

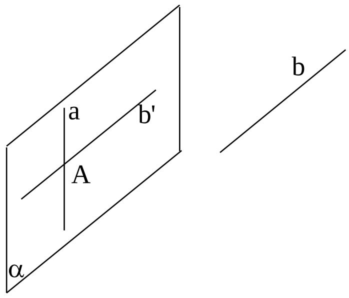
6.4 Distance entre deux droites.



a) Si les deux droites sont sécantes, alors le problème n'a pas de sens
b) Si les deux droites sont parallèles, alors d(d_1, d_2) = distance d'un point quelconque de d_1à la droite d_2
c) Si les deux droites sont gauches, on construira la perpendiculaire commune à ces deux droites:
$c \perp a$ et $c \perp b$ tel que : $c \cap a = \{A\}$ et $c \cap b = \{B\}$
alors d(a, b) = d(A, B)
Il nous reste donc à pouvoir tracer la perpendiculaire commune à deux droites gauches.

7. Quelques problèmes de construction

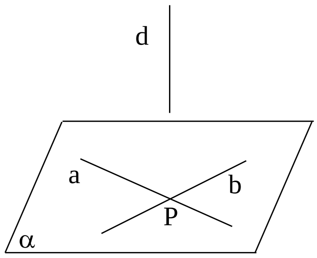
7.1 Par un point donné A, construire une droite a orthogonale à une droite donnée b



1. Par A, tracer la droite b' // b
2. Construire un plan α contenant b'
3. Dans α, tracer la droite $a \perp b'$

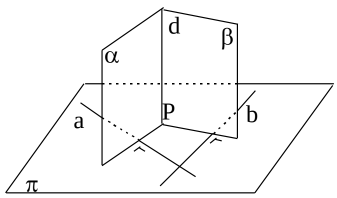
Il y a une infinité de plans α , donc une infinité de droites a

7.2 Par un point donné P, construire un plan $\alpha \perp$ à une droite d donnée



En utilisant la construction précédente, on trace deux droites a et b distinctes orthogonales à la droite d et comprenant P
Le plan cherché est le plan α déterminé par les droites a et b.
C'est l'unique solution

7.3 Par un point donné P, construire une droite d perpendiculaire à un plan π



1. On trace dans π deux droites sécantes a et b
2. On trace, par P, les plans α et β | $\alpha \perp a$ et $\beta \perp b$ (par la construction 2)
3. On considère la droite $d = \alpha \cap \beta$: c'est la droite cherchée.

(En effet : ($\alpha \perp a \Rightarrow d \underline{\perp} a$) et ($\beta \perp b \Rightarrow d \underline{\perp} b$) $\Rightarrow d \perp$ au plan comprenant a et b c.-à-d. π)
Cette solution est unique.

7.4 Construire la perpendiculaire commune à deux droites gauches a et b

1. Figure (1) : Choisir un point P de b et construire, par P, la droite a' // a et soit π le plan déterminé par les droites b et a'
2. figure (2) : Construire, par un point quelconque de la droite b, la droite d' $\perp$ π et soit α le plan déterminé par les droites b et d'
3. Figure(3) : Déterminer Q, le point de percée de la droite a dans le plan α et tracer par Q et dans α la droite d // à la droite d': la droite d est la droite cherchée.

en effet : d // d' ; d' $\perp$ b et (d et b sont coplanaires : dans α) $\Rightarrow$ d $\perp$ b
a // a' ; d // d' ; d' $\perp$ a')$\Rightarrow$ d $\perp$ a
or [d coupe a en Q] $\Rightarrow$ d $\perp$ a

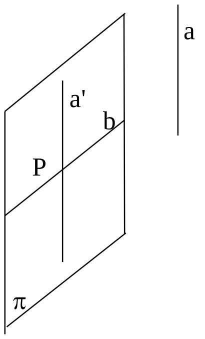


fig. 1

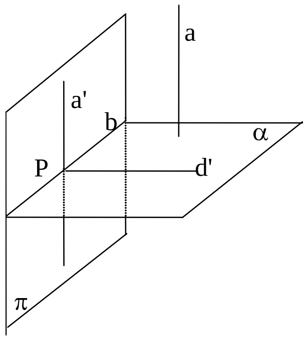


fig. 2

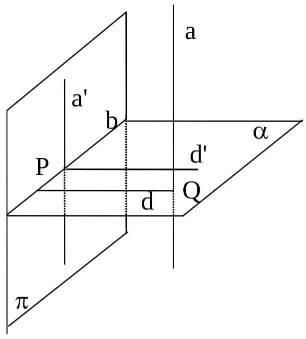
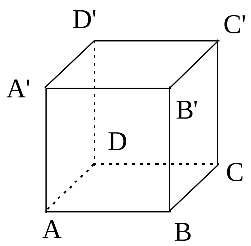


fig. 3

8. Exercices.

8.1 Vrai ou faux ?



1. Deux droites orthogonales à une même troisième sont parallèles.
2. Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.
3. Deux plans perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

Dans les 3 exercices suivants, on considère le cube standard ABCDA'B'C'D'

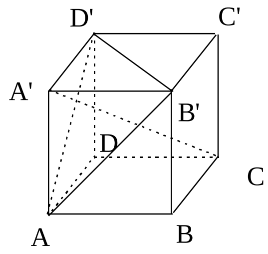
4. Les droites DA' et BD sont orthogonales.
5. Le triangle CDA' est rectangle.
6. Les droites B'D et AC' sont sécantes et orthogonales.
7. Dans un parallélépipède rectangle de dimensions 1 cm, 4 cm et 8 cm, la dimension d'une grande diagonale est un nombre entier de centimètres.

8.2 Orthogonalité

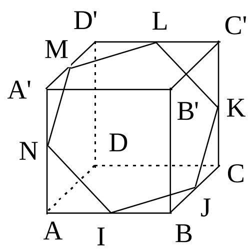
1. Les triangles ABC et ABD, non coplanaires, sont rectangles en B. Démontrer que les droites AB et CD sont orthogonales.
2. Sur trois demi-droites d'origine O et perpendiculaires deux à deux, on porte les points A, B et C équidistants de O. Démontrer que les trois paires d'arêtes gauches du tétraèdre OABC sont orthogonales.
3. Dans le cube standard ABCDA'B'C'D' on note I, J et K les milieux des arêtes [BB'] , [B'C'] et [AA']. Montrer que DA' est orthogonale au plan IJK. (utiliser le parallélisme de DA' et CB')
4. Les plans α et β se coupent suivant la droite i. a et b sont des droites de α et β (a $\subset$ α et b $\subset$ β) et a $\perp$ i et b $\perp$ i en I . A et B étant des points respectivement de a et b, démontrer que AB est orthogonale à i.
5. *Les 3 perpendiculaires*.
   Un point A se projette orthogonalement en B sur un plan α Le point B se projette orthogonalement en C sur une droite d contenue dansα. Montrer que les droites AC et d sont orthogonales.
6. Une pyramide a pour base un carré ABCD de centre O et son sommet S est sur la droite orthogonale au plan du carré issue du point O.
   a) Préciser les positions relatives des plans SAC et SBD ? Démontrer
   b) Soit I le milieu de [AB] et J celui de [CD]
   Montrer que le plan SIJ est perpendiculaire aux plans SAB et SCD.

8.3 Plan médiateur.

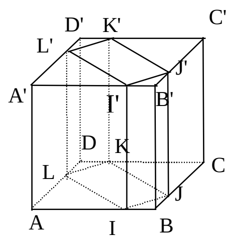
1. Démontrer que deux arêtes gauches d'un tétraèdre régulier sont orthogonales.
2. Dans un tétraèdre régulier, chaque arête est perpendiculaire au plan déterminé par son milieu et les deux sommets qui ne lui appartiennent pas. Démontrer.
3. Dans le cube représenté ci-contre, montrer que la diagonale A'C est orthogonale au plan du triangle AB'D'.



4. Etant donné un plan α, déterminer le lieu géométrique des points de ce plan équidistants de deux points donnés A et B quelconques.
5. On donne un triangle ABC.
   a) Démontrer que les plans médiateurs des côtés du triangle ont une droite commune d
   b) Démontrer que tout point de d est le centre d'une sphère comprenant les points A, B et C.
   c) Démontrer que le centre de toute sphère comprenant les points A, B et C est un point de d
   d) En déduire un lieu géométrique.
6. Dans un plan α, déterminer un point équidistant de trois points donnés A, B et C
7. On donne quatre points non coplanaires A, B, C et D.
   a) Préciser le lieu des points équidistants de A, B et C et le lieu des points équidistants de A, B et D
   b) Démontrer que les lieux précisés en a) ont un point commun.
   c) En déduire une propriété intéressante des tétraèdres.
8. Démontrer que dans un tétraèdre régulier, la perpendiculaire au plan d'une face menée par le point de rencontre de ses hauteurs comprend le quatrième sommet.



9. <u>*L'hexagone des milieux*</u>.
   Dans la figure ci-contre, les points I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des arêtes AB, BC, CC', C'D', D'A' et A'A du cube ABCDA'B'C'D'.
   a) Montrer que chacun de ces six points est à égale distance de D et de B'. Que pouvez-vous en déduire ?
   b) Comparer la longueur des segments [IJ] , [JK] , [KL] , [LM] , [MN] et [NI]
   c) En déduire la nature de l'hexagone IJKLMN.
10. <u>*Un carré inscrit dans un cube*</u>.: on considère un carré ABCD de côté 1 et on place les points I, J, K et L respectivement sur les côtés [AB], [BC] , [CD] et [DA] tels que $\overline{AI} = \overline{AL} = \overline{CJ} = \overline{CK} =$ 0.75
    a) Montrer que IJKL est un rectangle.
    b) Comme l'illustre la figure ci-contre, la construction précédente a été effectuée sur la face inférieure d'un cube d'arête 1. Les points I', J', K', L' sont alors les projetés orthogonaux de I, J, K et L sur la face A'B'C'D'.
    Quelle est la nature du solide IJKLI'J'K'L' ?
    c) Montrer que JKL'I' est un rectangle.
    d) Calculer I'J et JK et en déduire que JKL'I' est en fait un carré.



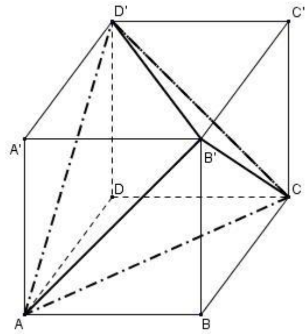
    <u>*Information*</u> : Le carré précédent a pour côté 0.75. $\sqrt{2}$ ≈1,0607..Il est plus grand qu'une face du cube. Mais c'est surtout le plus grand carré que l'on puisse inscrire dans le cube (dont les sommets sont sur les faces du cube).

8.4 Distances

1. Sur un cube dont l'arête mesure a, calculer :
   a) les longueurs des diagonales des faces
   b) les longueurs des diagonales
   c) la distance d'un sommet au centre d'une face qui ne le comprend pas.
   d) la distance d'un sommet au milieu d'une arête qui ne le comprend pas (plusieurs cas !)
   e) la distance des milieux de deux arêtes gauches.

f) la distance d'un sommet à un plan diagonal qui ne le comprend pas.
g) la distance d'un sommet au plan déterminé par les extrémités des arêtes comprenant ce sommet.

2. Sur un tétraèdre régulier d'arête a, calculer
   a) la hauteur de chacune des faces
   b) la hauteur du tétraèdre
   c) la distance des milieux de deux arêtes gauches.



3. Soit le cube ABCDA'B'C'D' d'arête de longueur a.
   a) Montrer que le tétraèdre ACD'B' est un tétraèdre régulier.
   Calculer la longueur de son arête en fonction de a.
   b) Soit F et G les centres de gravité des faces AB'D' et AB'C. Calculer la longueur du segment [FG] en fonction de a.

8.5 Perpendiculaires communes à deux droites gauches

1. Sur un cube ABCDA'B'C'D' d'arête a, déterminer la perpendiculaire commune aux droites suivantes.
   Déterminer ensuite la distance entre ces droites
   a) deux arêtes gauches (p. e. AB et DD')
   b) une arête et une diagonale de face (p. e. AD et B'C)
   c) deux diagonales de faces opposées (p. e. AC et B'D')
   d) une arête et une diagonale (p.e. AA' et BD')
   e) une diagonale et une diagonale de face (p.e. BD' et A'C')
   f) deux diagonales de faces sécantes (p.e. A'B et B'C)

2. Déterminer la perpendiculaire commune à deux arêtes gauches d'un tétraèdre régulier d'arête a.
   Calculer, en fonction de a, la distance entre ces arêtes.

3. Construire un cube dont deux arêtes sont portées par deux droites gauches orthogonales données.