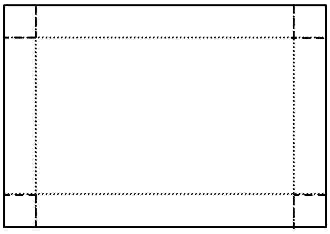
I. Généralités sur les fonctions : Rappels et prolongements.

1. Notion de fonctions - caractéristiques.

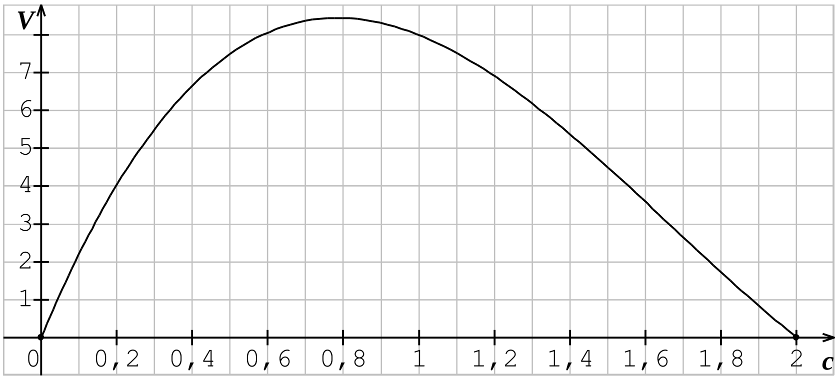
Dans beaucoup de situations de la vie courante nous sommes amenés à exprimer certaines quantités "en fonction" d'autres : le prix d'une marchandise en fonction de son poids, le prix de revient d'un article produit en fonction du prix des matières premières et de celui de la main d'œuvre ….



Exemple : Les dimensions d'un carton de forme rectangulaire sont respectivement 6 dm et 4 dm. On découpe des carrés de côtés identiques aux quatre coins de ce carton. Ensuite, on replie les bandes latérales et on les fixe de manière à obtenir une boîte parallélépipédique sans couvercle.
a) Exprimer le volume de la boîte ainsi obtenue en fonction de la longueur des côtés des carrés découpés.
b) Déterminer à l'aide de votre calculatrice la longueur des côtés des carrés permettant d'obtenir le plus grand volume possible.

Résolution du problème
Choix de la variable : désignons par c la longueur des carrés découpés.
Contraintes : $0 < c < 2$ (sinon, il est impossible de construire une telle boîte)
Expression du volume en fonction de la variable choisie : $V = c\,(4 - 2c)\,(6 - 2c) = 4c^3 - 20c^2 + 24c$
Calculons quelques valeurs du volume en fonction des côtés des carrés et représentons la situation par un graphique :

c	V(c)
0.2	4.032
0.4	6.656
0.6	8.064
0.8	8.448
1	8
1.2	6.912
1.4	5.376
1.6	3.584
1.8	1.728
2	0



Nous constatons qu'entre c = 0.7 et c = 0.9 , la fonction cesse de croître pour commencer à décroître. Elle atteint un maximum. Pour préciser celui-ci, calculons quelques valeurs supplémentaires.

c	V(c)
0.75	8.437
0.76	8.444
0.77	8.448
0.78	8.450
0.79	8.450
0.80	8.448

Par ce nouveau tableau de valeurs, nous constatons que la fonction V(c) atteint son maximum en un point voisin de 0.78 et si nous voulons une précision plus grande, il va falloir reprendre le procédé en affinant l'approximation.

Dans l'exemple qui précède, nous avons retrouvé les 3 manières de décrire une fonction :
- par son expression analytique
- par des tableaux de valeurs
- par un graphique

A travers cet exemple, nous constatons notre difficulté à déterminer les zones de croissance et de décroissance, les maxima ou minima..... d'une fonction. Il sera nécessaire de posséder des techniques permettant de déterminer avec précision ces divers éléments. C'est ce à quoi nous nous attacherons dans la suite du cours d'analyse. Cependant, pour certaines fonctions particulières, nous avons déjà réalisé ce travail : il s'agit des fonctions du premier et du second degré.

2. Rappels.

2.1 Equations et fonctions du premier degré.

Toute *équation réductible au premier degré* peut se mettre sous la forme:

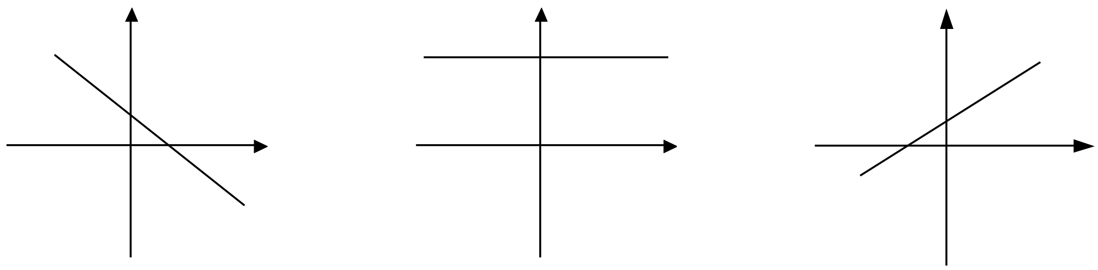
$mx + p = 0 \Leftrightarrow mx = -p$ (*)

si $m = 0$ l'équation (*) devient $0\,x = -p$ si $p = 0$ elle est indéterminée $S = R$

si $p \neq 0$ elle est impossible $S = \varnothing$

si $m \neq 0$ $x = -\dfrac{p}{m}$

Une *fonction affine* est de la forme $f(x) = mx + p$ (si $m \neq 0$, on a une fonction du premier degré)
Sa représentation graphique est une droite d'un des types suivants :



si $m < 0$ si $m = 0$ si $m > 0$

De ces graphiques nous tirons la **<u>règle du signe</u>**:

une fonction du premier degré $f(x) = mx + p$ est du signe contraire de m avant la racine et du signe de m après la racine.

<u>Schématiquement:</u>

si $m < 0$

x		- p/m	
mx + p	+	0	-

si $m > 0$

x		- p/m	
mx + p	-	0	+

2.2 Equations et fonctions du second degré.

2.2.1 Equation du second degré à une inconnue.

Le nombre de solutions d'une équation $ax^2 + bx + c = 0$ $a, b, c \in R$ $a \neq 0$ est déterminé par la valeur de son réalisant : $\rho = b^2 - 4ac$

a) $\rho > 0 \Rightarrow$ 2 racines réelles $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\rho}}{2a}$

b) $\rho = 0 \Rightarrow$ 1 racine double $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

c) $\rho < 0 \Rightarrow$ pas de racine réelle.

<u>Remarques</u> :

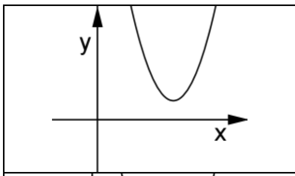
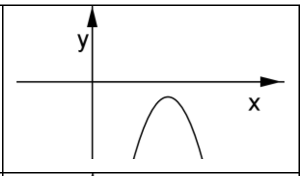
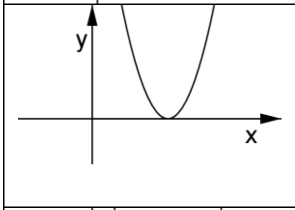
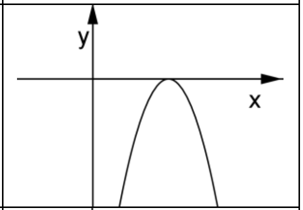
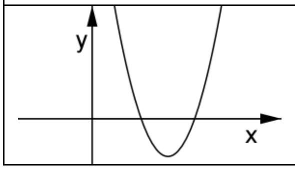
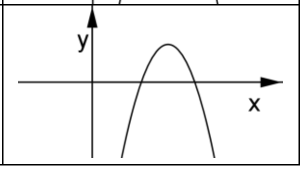
1. Somme et produit des solutions d'une équation du second degré : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$
2. Factorisation d'un trinôme du second degré : si $\rho > 0$: $ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$
   si $\rho = 0$: $ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)^2$

2.2.2 *Résumé des caractéristiques d'une fonction du second degré*

Le graphe d'une fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad a, b, c \in R \quad a \neq 0$

- admet toujours pour axe de symétrie la droite $x = \frac{-b}{2a}$
- a un extrémum de coordonnée $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\rho}{4a}\right)$

<u>Si $a > 0$, la parabole a un minimum</u> <u>Si $a < 0$, la parabole a un maximum.</u>

	Si $\rho < 0$ La parabole ne coupe pas l'axe des x	
	Si $\rho = 0$, elle est tangente à l'axe des x	
	Si $\rho > 0$, elle coupe l'axe des x en x_1 et x_2 solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	

L'observation des graphiques précédents nous permet de retrouver **<u>la règle du signe d'une fonction du second degré</u>**:

> *Le trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a sauf en ses racines (lorsqu'elles existent) où il s'annule et entre ses racines où il est du signe contraire de a*

<u>Schématiquement:</u>

si $a < 0$ et $\rho > 0$

x		x_1		x_2	
$ax^2 + bx + c$	-	0	+	0	-

si $a > 0$ et $\rho > 0$

x		x_1		x_2	
$ax^2 + bx + c$	+	0	-	0	+

si $a < 0$ et $\rho = 0$

x		$x_1=x_2$	
$ax^2 + bx + c$	-	0	-

si $a > 0$ et $\rho = 0$

x		$x_1= x_2$	
$ax^2 + bx + c$	+	0	+

si $a < 0$ et $\rho < 0$

x			
$ax^2 + bx + c$	-	-	-

si $a > 0$ et $\rho < 0$

x			
$ax^2 + bx + c$	+	+	+

2.3 *Applications*

2.3.1 *Tracer les graphes des fonctions suivantes en précisant leurs caractéristiques*

1. $f(x) = 2x^2+ 5x - 3$
2. $f(x) = 12 - 3x^2$
3. $f(x) = 18x^2 - 12x + 2$
4. $f(x) = 4x^2 - 2x +1$
5. $f(x) = 3x^2 - 4x$
6. $f(x) = \frac{1}{2} x^2 + x - 4$

2.3.2 *Déterminer les valeurs de r et s afin de satisfaire aux conditions imposées.*

1. La parabole $P \equiv y = x^2 + 2rx + 8$ comprend le point (-2, 3)
2. La parabole $P \equiv y = 2x^2 + (r - 1)x + r^2 - 1$ admet l'axe des y comme axe de symétrie

3. La parabole $P \equiv y = x^2 + rx + s$ a un minimum en (-2, 5)
4. La parabole $P \equiv y = x^2 + rx + s$ coupe l'axe des x en (-3, 0) et a un minimum pour x = -2
5. La parabole $P \equiv y = rx^2 - 2x + s \ni A(-1,2)$ et B (2,3)

Solutions :
1) $r = \frac{9}{4}$ 2) r = 1 3) r = 4 et s = 9 4) r = 4 et s = 3 5) $r = \frac{7}{3}$ et $s = -\frac{7}{3}$

2.3.3 Déterminer les points d'intersection de la parabole P et de la droite d et vérifier graphiquement la solution obtenue :

1. $P \equiv y = 2x^2 + 5x - 3$ et $d \equiv 2x - y + 4 = 0$
2. $P \equiv y = 9 - x^2$ et la droite d comprenant les points A(1, 2) et B(-3,1)
3. $P \equiv y = 3x^2 + 15x$ et la droite d comprenant le point A(3, -1) et formant un angle de 30° avec la partie positive de l'axe des abscisses.

Solutions :
1) (-2.77, -1.53) et (1.27, 6.53) 2) (2.57 , 2.39) et (-2.82, 1.04) 3) (-4.61, -5.39) et (-0.20, -2.85)

2.3.4 Déterminer la droite d tangente à la parabole P et préciser les points de contact. Vérifier graphiquement les résultats obtenus.

1. $P \equiv y = 4 - x^2$ et $d \equiv y = 2x + k$
2. $P \equiv y = x^2 - 2x - 3$ et d comprend le point A(-1, -1)
3. La parabole $P \equiv y = x^2 + bx + c$ comprend les points A(1,-6) et B(4, 6) et la droite d formant un angle de 45° avec la partie positive de l'axe des x.

Solutions :
1) $t \equiv y = 2x + 5$ Point de contact : (-1, 3)
2) $t_1 \equiv y = -2x - 3$ Point de contact : (0, -3) et $t_2 \equiv y = -6x - 7$ Point de contact : (-2 , 5)
3) $t \equiv y = x - 7$ Point de contact : (1, - 6)

2.3.5 Simplifier si possible.

1. $\dfrac{2x^2 - x - 3}{4x^2 - 4x - 3}$
2. $\dfrac{3x^2 + 2x}{3x^2 - x - 2}$
3. $\dfrac{6m^2 + m - 2}{3m - 2m^2 - 1}$
4. $\dfrac{6x^3 + 4x^2 - 2x}{3x^2 - x}$
5. $\dfrac{6x^2 - 5x - 4}{2x^3 + 3x^2 - 3x - 2}$
6. $\dfrac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^4 - x^3 + x - 1}$
7. $\dfrac{x^5 - a^2x^3 + a^3x^2 - a^5}{4(x^2 + 2ax + a^2)(x^3 - a^3)}$
8. $\dfrac{6x^3 + 7x^2 - x - 2}{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}$

Solutions :
1. $\dfrac{x + 1}{2x + 1}$
2. $\dfrac{x}{x - 1}$
3. $\dfrac{3m + 2}{1 - m}$
4. 2 (x+1)
5. $\dfrac{3x - 4}{(x + 2)(x - 1)}$
6. $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$
7. $\dfrac{a^2 - ax + x^2}{4(a^2 + ax + x^2)}$
8. $\dfrac{3x + 2}{x - 3}$

2.3.6 Déterminer les domaines des fonctions suivantes :

N.B. : le domaine d'une fonction $f\ R \to R$ est l'ensemble des valeurs de R où f est définie.

1. $\sqrt{3x^2 + 2x + 1}$
2. $\sqrt{1 + 2x - 3x^2}$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
4. $\sqrt{\dfrac{4 - x^2}{2 + 3x}}$
5. $\sqrt{4 - x^2} - \sqrt{2 + 3x}$
6. $\dfrac{\sqrt{-x^2 - 2x + 2}}{\sqrt{x + 1}}$
7. $\dfrac{\sqrt{2x - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}$
8. $\dfrac{\sqrt{|3x - 1|}}{\sqrt{1 - x^2}}$
9. $\sqrt{\dfrac{x^2 - 7x - 8}{x^3 + 3x^2 + 2x}}$
10. $\sqrt[3]{3x^3 - 7x}$

11. $\sqrt{\dfrac{x-4}{|x-5|}}$

12. $\dfrac{4x}{\sqrt{x^4-16}}$

13. $\sqrt{x^3-6x^2+11x-6}$

14. $\sqrt{6x^3-11x^2-4x+4}$

15. $\sqrt{\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{2x^2-1}}$

16. $\sqrt{x^2-4x+3}+\dfrac{2x+4}{\sqrt{-x-5}}$

17. $\dfrac{\sqrt{x^3+4x^2+x-6}}{x^2-16}$

18. $\sqrt{x-2}-5x\sqrt{x^2-9}$

Solutions :

1. R
2. $[-\frac{1}{3}, 1]$
3.]-1, 1[
4. $]-\infty, -2] \cup]-\frac{2}{3}, 2]$
5. $[-\frac{2}{3}, 2]$
6. $]-1, -1+\sqrt{3}\,]$
7. [0, 1[
8.]-1, 1[
9. $]-2, -1[\cup]-1, 0[\cup [8, +\infty[$
10. R
11. $[4, +\infty[/\{5\}$
12. $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$
13. $[1, 2] \cup [3, +\infty[$
14. $[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty[$
15. $[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1] \cup [2, +\infty[$
16. $]-\infty, -5[$
17. $[-3, -2] \cup [1, +\infty[/ \{4\}$
18. $[3, +\infty[$

Remarque.

Nous sommes parfois amenés à résoudre des équations irrationnelles:

Exemple: soit à déterminer les conditions d'existence de la fonction $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-\sqrt{2x+3}}$

C.E. : a) $2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{3}{2}$

b) $x - \sqrt{2x+3} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} \neq x$

Résolvons tout d'abord l'équation $\sqrt{2x+3} = x$

En élevant au carré les deux membres de cette égalité nous obtenons:

$2x + 3 = x^2$ avec les conditions $x \geq -\dfrac{3}{2}$ et $x \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ et $x \geq 0$

$\Leftrightarrow (x = -1$ ou $x = 3)$ et $x \geq 0$

$\Leftrightarrow x = 3$

Donc dom. f : $[-3/2, \rightarrow[\setminus\{3\}$

Exercice : Déterminer le domaine des fonctions suivantes :

a) $\dfrac{\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{x^2-1}}$

b) $\dfrac{\sqrt{1-2x}}{3x-\sqrt{x^2+1}}$

Solutions :

a) $[1, +\infty[/\{\sqrt{2}\}$

b) $]-\infty, \frac{1}{2}] / \{\frac{\sqrt{2}}{4}\}$

3. Les fonctions : modèles mathématiques.

1. Un rectangle inscrit dans un triangle isocèle.
   Comment varie l'aire d'un rectangle inscrit dans un triangle isocèle dont la base mesure 3 cm et la hauteur 4 cm ?

2. L'impôt des personnes physiques
   Pour couvrir les besoins collectifs, l'Etat récolte des fonds (impôts ou taxes) auprès des citoyens et des sociétés. Nous examinerons ici l'impôt des personnes physiques en Belgique pour l'année 2002.
   Le tableau ci-dessous reprend les taux d'imposition applicables par tranches de revenus (de 2001)
   Le terme excédent en tête de la quatrième colonne désigne la fraction des revenus qui dépasse la limite inférieure de la tranche.

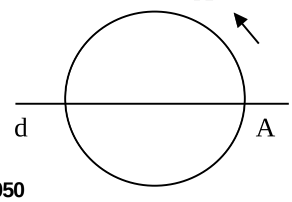
Plus de	mais pas plus de	l'impôt de base s'élève à	plus sur l'excédent
0	6 570 €	0	25%
6 570 €	8 710 €	1 642,50€	30%
8 710 €	12 420 €	2 284,50 €	40%
12 420 €	28 540 €	3 768,50 €	45%
28 540 €	42 810 €	11 022,50 €	50%
42 810 €	62 790 €	18 157,50 €	52.5%
62 790 €		28 647 €	55%

a)Calculer l'impôt dû pour un revenu imposable annuel de 5 000 €, 7 000 €, 15 000 €.
Si on appelle x le revenu imposable annuel, donnez pour chaque tranche la formule (expression analytique) qui permet de trouver l'impôt i(x).
b) Que penser des affirmations suivantes ?

- "Ca ne sert à rien que je travaille plus, je vais tomber dans une tranche d'impôt supérieure et je gagnerai finalement moins que maintenant".
- "En général, on dit que 50 % du revenu est perdu sous forme d'impôts".

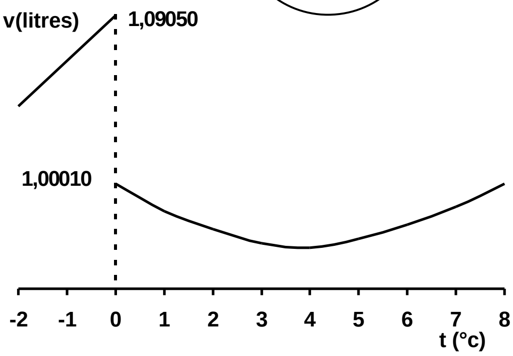
c) Examinez ce qu'apporte une présentation graphique des questions ci-dessus.

3. Un objet tournant à une fonction périodique.
Soit un point A d'une roue de rayon r, qui tourne à vitesse constante (un tour par minute). Tracez un diagramme donnant, en fonction du temps (exprimé en secondes), la hauteur de A par rapport au sol
(en t = 0 le point A est sur l'axe d (voir figure ci-contre))



4 Dilatation de l'eau en fonction de la température.
Les corps se dilatent lorsqu'on augmente la température. L'eau a pourtant un comportement particulier. Décrivez le comportement de l'eau en commentant la figure ci-contre. Quelles sont les conséquences d'un tel comportement ?

Cette dernière fonction nous permet de souligner une caractéristique nouvelle : la continuité. Ici, nous dirons que la fonction v(t) (volume de l'eau en fonction de sa température) n'est pas continue en 0.



4. Exercices.

Pour certains des exercices suivants, l'usage d'une calculatrice de niveau "Casio graph 35" est nécessaire

1. Exprimer l'aire d'un triangle équilatéral en fonction de la longueur d'un de ses côtés. Sol : $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$
2. Exprimer l'aire extérieure totale d'un cube en fonction de son volume V. Sol : $6\sqrt[3]{V^2}$
3. Le périmètre d'un rectangle mesure 20m. Exprimer l'aire de ce rectangle en fonction de la longueur d'un de ses côtés. Déterminer la longueur de ce côté pour que l'aire soit maximale. Sol : $A(c) = c(10 - c) \Rightarrow c = 5$
4. L'aire d'un rectangle mesure 16 m^2. Exprimer le périmètre de ce rectangle en fonction de la longueur d'un de ses côtés. Déterminer la longueur de ce côté pour que ce périmètre soit minimal.
Sol : $p(c) = 2\left(c+\frac{16}{c}\right) \Rightarrow c = 4$
5. Une boîte rectangulaire de 2 m^3 de volume a une base carrée de côté c. Exprimer l'aire extérieure de cette boîte en fonction de c. Déterminer cette longueur pour que l'aire soit minimale. sol : x = 1.26
6. Un aquarium parallélépipédique (ouvert au-dessus) de 15 cm de haut doit avoir une contenance de 600 cm^3 .
Désignons par x la longueur et par y la largeur de la base.
a) Exprimer y en fonction de x

b) Exprimer l'aire totale A de verre nécessaire à sa fabrication en fonction de x
c) Déterminer la valeur de x pour que cette aire soit minimale. sol : x = 6.32

7. Une montgolfière prend son départ à 13 heures et s'élève verticalement à une vitesse de 2m/s. Le point duquel on l'observe est situé à 100 m de son point de décollage. Si t désigne le temps (en s) à partir de 13 heures, exprimer la distance d entre la montgolfière et l'observateur en fonction du temps t.

8. D'une navette spatiale située à une altitude h de la terre, un astronaute regarde vers la terre. Donner la formule de la distance y qui le sépare du point de la terre le plus éloigné qu'il puisse voir, en fonction de son altitude h et du rayon r de la terre. Faire le calcul lorsque h = 200 km et r ≅ 6400 km.
Sol : a) $y = \sqrt{2rh + h^2}$ b) 1612 km

9. On inscrit un triangle ABC rectangle en C dans un demi-cercle de diamètre 15 cm
a) Si x désigne la longueur du côté AC, exprimer la longueur y du côté BC en fonction de x.
b) Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de x.
c) Déterminer les valeurs de x et y pour que cette aire soit maximale. sol : x = 10.6 cm et y = 10.6 cm
d) Que vaut cette aire maximale ? sol : 56.25 cm^2

10. Un cylindre circulaire droit de rayon r et de hauteur h est inscrit à un cône de hauteur 12 et de rayon de base 4.
a) Exprimer h en fonction de r. (Suggestion : utiliser des triangles semblables.)
b) Exprimer le volume V du cylindre en fonction de r.
c) Déterminer les dimensions du cylindre ayant le volume maximum. Que vaut ce maximum ?
sol : a) h = 12 – 3r b) $V = 3\pi r^2 (4 - r)$ c) r = 2.67 h = 4 V = 89.36

11. Un terrain, de forme rectangulaire, a pour dimensions 10 mètres sur 15 mètres. On y trace des allées de largeur uniforme: une en fait le tour à l'intérieur, tandis que deux autres divisent le jardin en 4 parties (cultivables) identiques. Exprimer la surface utile en fonction de la largeur des allées. Déterminer cette largeur si l'on veut disposer d'une surface utile égale à 104 m^2 ? sol : 0.67 m

12. En pliant à angle droit les deux bords d'une bande de zinc de 32 cm de large, on forme une gouttière. Quelle hauteur doivent avoir les bords pour que la capacité de la gouttière soit maximale ? sol : h = 8 cm

5. Tableaux de nombres et types de fonctions

5.1 Propriétés

Comment reconnaître dans un tableau de valeurs si on a affaire à une fonction du premier ou du second degré ? Prenons des exemples de fonctions du premier degré et pour des accroissements constants de la variable, calculons les accroissements correspondants de la fonction.

Exemple 1

x	f(x) = 2x + 1	Δf
1	3	
		2
2	5	
		2
3	7	
		2
4	9	
		2
5	11	

Exemple 2

x	f(x) = -3x + 5	Δf
1	2	
		-3
2	-1	
		-3
3	-4	
		-3
4	-7	
		-3
5	-10	

Dans les 2 exemples proposés, nous avons considéré des accroissements de la variable constants. Nous constatons alors que la différence entre les valeurs de la fonction est également constante.

⇒ pour une fonction du premier degré $f : R \to R : x \to f(x) = ax + b$
Lorsque l'accroissement de la variable Δx est constant, alors l'accroissement correspondant de la fonction $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ est constant également.

Démonstration :

$f(x + \Delta x) – f(x) = a (x + \Delta x) + b – (ax + b) = ax + a \Delta x– ax = a \Delta x$

Si nous prenons maintenant des exemples de fonctions du second degré :
Nous constatons alors que pour des accroissements constants de la variable, les accroissements correspondants de la fonction (Δf) ne sont plus constants. Cependant les différences secondes (différences entre les accroissements successifs de la fonction) sont constantes.
Les 2 exemples suivants l'illustrent.

Exemple 4

x	$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$	Δf	$\Delta (\Delta f)$
1	4		
		9	
2	13		4
		13	
3	26		4
		17	
4	43		4
		21	
5	64		

Exemple 5

x	$f(x) = -3x^2 + 2x + 5$	Δf	
1	4		
		-7	
2	-3		-6
		-13	
3	-16		-6
		-19	
4	-35		-6
		-25	
5	-60		

$\Rightarrow$ pour une fonction du second degré $f : R \rightarrow R : x \rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$
Lorsque l'accroissement de la variable Δx est constant, alors les différences secondes de la fonction (accroissements des accroissements de la fonction) sont constantes.

Démonstration :
Nous devons donc montrer que pour un accroissement Δx constant, la différence seconde :
$[f(x + 2 \Delta x) – f(x + \Delta x)] – [f(x + \Delta x) – f(x)]$ est constante
En effet :$[f(x + 2 \Delta x) – f(x + \Delta x)] – [f(x + \Delta x) – f(x)] = f(x + 2 \Delta x) – 2 f(x + \Delta x) + f(x)$
$= a (x + 2\Delta x)^2 + b (x + 2 \Delta x) + c – 2a (x + \Delta x)^2 – 2b (x + \Delta x) – 2c + ax^2 + bx + c$
$= a x^2 + 4 ax \Delta x + 4a (\Delta x)^2 + bx + 2b \Delta x – 2a x^2 – 4ax \Delta x – 2a(\Delta x)^2 – 2bx –2b \Delta x + ax^2 + bx$
$= 2a (\Delta x)^2$
qui est bien constant si Δx est constant.

5.2 Applications

a) Déterminer dans les tableaux de valeurs suivants s'il s'agit de fonctions du premier ou du second degré.
Ensuite, déterminer l'expression analytique de la fonction et tracer son graphe.

x	$f_1(x)$
1	8
2	11
3	14
4	17
5	20
6	23
7	26

x	$f_2(x)$
1	0
2	1
3	6
4	15
5	28
6	45
7	66
8	91

x	$f_3(x)$
-3,2	23,8
-2,3	13,81
-1,4	7,06
-0,5	3,55
0,4	3,28
1,3	6,25
2,2	12,46
3,1	21,91

x	$f_4(x)$
3,3	-0,21
3,4	-0,18
3,5	-0,15
3,6	-0,12
3,7	-0,09
3,8	-0,06
3,9	-0,03

La résolution des exercices précédents se fait aisément en résolvant un système d'équations (système de 2 équations à 2 inconnues s'il s'agit d'une fonction du premier degré ou un système de 3 équations à 3 inconnues s'il s'agit d'une fonction du second degré).
b) Cependant, dans la pratique, les valeurs connues sont parfois entachées d'erreurs (dues à des imprécisions de mesure…)
Considérons l'exemple suivant :
Le trajet d'un objet lancé est un phénomène complexe qui peut être modélisé par une équation d'une fonction déjà connue. Un professeur de mathématiques a filmé avec une caméra numérique son fils en train de lancer un ballon. En regardant cet enregistrement avec arrêts sur images, il repère les données présentées ci-dessous (exprimant la hauteur de l'objet par rapport au sol en fonction de la durée).

Durée (en s)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Hauteur (en cm)	84	121	149	167	175	174	163	143	114	75

On demande de

- Construire le graphique à partir des données du tableau.
- Déterminer de quel type de fonction il s'agit
- Déterminer la forme analytique de cette fonction

<u>Commentaires</u>

En utilisant l'outil rencontré précédemment, nous constatons que les "différences secondes" de ce tableau de valeurs sont proches d'une constante (elles valent toutes –9 ou –10). On peut donc dire qu'on a "presque" une fonction du second degré.

Durée (en s)	0		0.1		0.2		0.3		0.4		0.5		0.6		0.7		0.8		0.9
Hauteur (en cm)	84		121		149		167		175		174		163		143		114		75
Δf		37		28		18		8		-1		-11		-20		-29		-39	
$\Delta(\Delta$f)			-9		-10		-10		-9		-10		-9		-9		-10		

Mais au moment de déterminer de quelle fonction il s'agit, nous sommes confrontés à un problème de choix :
L'équation de la fonction peut être obtenue
• soit en résolvant un système de trois équations à trois inconnues qui se ramène
rapidement à un système de deux équations à deux inconnues puisque l'on connaît l'ordonnée à l'origine,
• soit en estimant la position de l'axe de symétrie,
• soit en estimant la position des racines,
• soit en utilisant les formules de cinématique vues au cours de physique.
Et on constate aisément que ces différentes techniques ou même simplement le choix des équations du système nous conduiront à des fonctions différentes les unes des autres. Quelle fonction choisir dans ce cas et selon quel critère ?
Actuellement, nous n'avons pas encore établi de critère de choix pour déterminer une telle fonction : nous aborderons ces problèmes d'ajustement lors de l'étude des statistiques.

6. Exercices supplémentaires

6.1 Factorisation et ses applications.

6.1.1 Factoriser au maximum:

1. $-12x^4 - 12x^3 + 51x^2 + 27x - 54$
2. $10x^4 -11x^3 - 21x^2 + 4x + 4$
3. $3x^3 + 8x^2 + 3x - 2$
4. $2x^3 + 5x^2 + x - 2$
5. $12x^4 + 17x^3 - 22x^2 - 13x + 6$

6.1.2 Simplifier, si possible, les fractions rationnelles suivantes:

1. $\dfrac{-4x^2-3x+1}{8x-2}$
2. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$
3. $\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$
4. $\dfrac{2x^2-5x+2}{8-2x-x^2}$
5. $\dfrac{4x^2-4x+1}{-x^2-9x+5}$
6. $\dfrac{4x^2-12x+9}{2x^2-x-3}$
7. $\dfrac{x^2+8x+15}{2x^2+12x+18}$
8. $\dfrac{6x^3-13x^2+x+2}{4x^3-8x^2-x+2}$

6.2 La fonction du second degré

6.2.1 Fonctions et leurs caractéristiques.

Tracer les graphes des fonctions suivantes et donner leurs caractéristiques.

1. $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 9$
2. $f(x) = 2x^2 - x + 3$
3. $f(x) = -x^2/9 + 4$
4. $f(x) = 3x^2 - x + 1$
5. $f(x) = - 2x^2 + 3x + 3$
6. $f(x) = - 3x^2 + 5x - 1$

6.2.2 Exercices généraux.

1. Déterminer m et p pour que les points A(2,1) et B(-1,3) appartiennent à la parabole $P \equiv y = 2x^2 + 3mx + P$
2. Déterminer m et p pour que la parabole $P \equiv y = - 2x^2 - 3mx + p$ ait pour sommet le point (3,-1)
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite d et de la parabole P si
   a) $d \equiv y = 2x - 1$ et $P \equiv y = x^2 - x + 1$
   b) $d \equiv 2x - 3y + 5 = 0$ et $P \equiv 3x^2 - 4x + 3$

6.3 Inéquations du second degré à une inconnue.

6.3.1 Résoudre les inéquations suivantes:

1. $x^2 - 8x + 7 \leq 0$
2. $-3x^2 + 2x + 5 \leq 0$
3. $9x^2 - 16 > 0$
4. $3x^2 + 4x + 7 < 0$
5. $9x^2 - 6x + 1 > 0$
6. $- 4x^2 + 12x - 9 \leq 0$

6.3.2 Résoudre les inéquations suivantes:

1. $\frac{x+1}{x+2} \leq \frac{x+3}{x-1} + 2$
2. $\frac{1-3x}{x+2} - \frac{2x}{3-x} < 1$
3. $\frac{x+2}{3x+1} \geq \frac{2x+3}{x-1}$
4. $\frac{2x-1}{1-3x} \leq \frac{4x-2}{2x+3}$
5. $\frac{2x(1-x^2)}{-4x^2-5x+3} \leq 0$
6. $\frac{2x^2+5}{(3-2x)(2x^2+5x-3)} > 0$
7. $\frac{3x(1-4x^2)}{2x^2-3x-2} \leq 0$
8. $\frac{4x-5}{-5-4x^2+2x} > 0$

6.3.3 Résoudre les systèmes d'inéquations suivants:

1. $\begin{cases} 3x^2 - 5 < 0 \\ 4x + 2 \leq 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x^2 - 5x + 3 > 0 \\ 4x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 4x - 5 \geq 0 \\ 3x - 2x^2 - 5 < 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x(5x^2 + 3x) > 0 \\ x^2 + 7x - 2 \leq 0 \end{cases}$

6.3.4 Déterminer les domaines des fonctions suivantes:

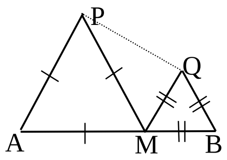
1. $f(x) = \sqrt{3x(1-2x)} - \sqrt{5x^2 - 2x + 3}$
2. $f(x) = \frac{\sqrt{3-x^2}}{1-\sqrt{x}}$
3. $f(x) = \sqrt{1-2x} - \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$
4. $f(x) = \sqrt{3x-2} - \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$
5. $f(x) = \frac{3-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x^2+2x-1}}$
6. $f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3x^2-x-1}}$
7. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{2-x}}$
8. $f(x) = \frac{3+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2-x}}$

6.4 Problèmes d'extrema

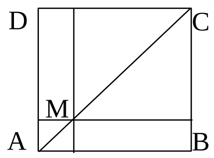
1. Le directeur d'une salle de théâtre a remarqué qu'à 1€. la place, il peut compter sur 500 spectateurs et que chaque baisse de 0.10 €. lui amène 100 personnes de plus. Combien doit-il faire payer la place pour obtenir un revenu maximal ?

2. Soit C la courbe représentative de la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad x \to f(x) = \sqrt{x}$ et le point A(2,0)
   a) Soit M un point de C d'abscisse x ($x \geq 0$). Exprimer en fonction de x le carré de la distance $\overline{AM}$.
   b) Quel est le point de C le plus près de A ?

3. Etant donné un segment [A,B] de longueur 1, et un point M de ce segment, on construit les triangles équilatéraux AMP et MBQ.
   a) Déterminer M pour que l'aire du triangle MPQ soit maximale.
   b) Déterminer M pour que l'aire du quadrilatère APQB soit minimale.
   ($x = \overline{AM}$)



4. La longueur du côté du carré ABCD vaut 1 m.
   Où doit-on placer le point M sur la diagonale [A,C] pour que la surface formée par les deux carrés obtenus sur la figure ci-contre soit minimale. ?



6.5 Solutions des exercices supplémentaires.

6.5.1 N° 6.1.1

1. $3(x-1)(x+2)(3-2x)(3+2x)$
2. $(x+1)(x-2)(2x-1)(5x+2)$
3. $(x+2)(3x-1)(x+1)$
4. $(x+1)(2x-1)(x+2)$
5. $(x-1)(x+2)(3x-1)(4x+3)$

6.5.2 N° 6.1.2

1. $\dfrac{-(x+1)}{2}$
2. $\dfrac{x+1}{x+2}$
3. $\dfrac{x+2}{x-3}$
4. $\dfrac{1-2x}{x+4}$
5. pas de simplification
6. $\dfrac{2x-3}{x+1}$
7. $\dfrac{x+5}{2(x+3)}$
8. $\dfrac{(x-2)(2x-1)(3x+1)}{(x-2)(2x-1)(2x+1)} = \dfrac{3x+1}{2x+1}$

6.5.3 N° 6.2.1

1. axe : x = 0 max : (0,9) racines: ±6
2. axe x = 1/4 min (1/4 , 23/8) $\rho < 0$
3. x = 0 max : (0,4) racines : ± 6
4. axe : x = 1/6 min : (1/6 , 11/12) $\rho = -11$
5. axe : x = ¾ max : $\left(\frac{3}{4}, \frac{33}{8}\right)$ racines $\dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$
6. axe : $x = \dfrac{5}{6}$ max: $\left(\dfrac{5}{6}, \dfrac{13}{12}\right)$ rac : $\dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$

6.5.4 N° 6.2.2

1. m = - 8/9 et p = - 5/3
2. m = - 4 ; p = -19
3. a) A(2, 3) et B(1, 1) b) A $\left(\dfrac{14+\sqrt{52}}{18}, \dfrac{59+\sqrt{52}}{27}\right)$ et B $\left(\dfrac{14-\sqrt{52}}{18}, \dfrac{59-\sqrt{52}}{27}\right)$

6.5.5 N° 6.3.1

1) [1, 7] 2) $]-\infty, -1] \cup [\frac{5}{3}, +\infty[$ 3) $]-\infty, -\frac{4}{3}] \cup]\frac{4}{3}, +\infty[$ 4) $\varnothing$ 5) $\mathbb{R}/\{\frac{1}{3}\}$
6) R

6.5.6 N° 6.3.2

1.]- ∞, - 3]∪]-2, - $\frac{1}{2}$] ∪]1, + ∞[
2.]- ∞ , - 2[∪] $\frac{15-\sqrt{249}}{4}$, 3[∪] $\frac{15+\sqrt{249}}{4}$, +∞[
3.]- $\frac{1}{3}$, 1[∪ {-1}
4.]- ∞, - $\frac{3}{2}$ [∪ [$-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$ [∪ [$\frac{1}{2}$, + ∞[
5.]- ∞, $\frac{5+\sqrt{73}}{-8}$ [∪ [- 1, 0] ∪] $\frac{5-\sqrt{73}}{-8}$, 1]
6.]- ∞, - 3[∪] $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ [
7. [0, $\frac{1}{2}$] ∪]2, + ∞[
8.]- ∞, $\frac{5}{4}$ [

6.5.7 N° 6 3.3

1.] $-\sqrt{\frac{5}{3}}, -\frac{1}{2}$]
2. [$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$]
3. [$\frac{5}{4}$, + ∞[
4.]- $\frac{3}{5}$, 0[∪]0, 0, $\frac{-7+\sqrt{57}}{2}$]

6.5.8 N° 6.3.4

1. [0, $\frac{1}{2}$]
2. [0, $\sqrt{3}$] / {1}
3.]- ∞, - 3[
4. [$\frac{2}{3}$,3[
5. [$\frac{2}{3}$, + ∞[
6.] $\frac{1}{2}$, + ∞[
7. [-1, 1] ∪]2, + ∞[
8. [-1, 1]

6.5.9 N° 6.4

1. Recette totale = - 10 x^2 + 50x + 500 (x = nombre de réductions de 0.1 €) : max atteint pour x = 2,5 et donc le prix d'une place vaut alors : 075 €
2. $|AM|^2 = x^2 - 3x + 4$: min pour x = $\frac{3}{2}$
3. a) Aire du triangle PQM = $\frac{-\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x$ max pour x = $\frac{1}{2}$

   b) Aire du quadrilatère APQB : $\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 - x + 1)$ min pour x = $\frac{1}{2}$
4. Aire totale des 2 carrés : $2x^2 - 2x + 1$ min pour x = $\frac{1}{2}$